

第6回

7. 偏光素子作用の数学表示；ジョーンズ行列とミュラー行列・・・・・・・・・・	97
7.1 ジョーンズ・ベクトルとジョーンズ行列	97
7.2 ジョーンズ行列の応用例	102
7.2.1 バンドパス・フィルター	103
7.2.2 ひずみ計	106
7.2.3 エリプソメーター	109
7.3 ストークス・ベクトルとミュラー行列	112

7 偏光素子作用の数学表示；ジョーンズ行列とミュラー行列

直線偏光子や補償板などの働きはそれ単独であれば、特に数学の助けを借りなくても予想できる。しかし、それらがいくつか組み合わせられた光学系では互いの素子間の配置関係もあり、その働きは複雑になる。このような場合に個々の光学素子の働きを数学的に表し、各素子の組み合わせの働きをそれらの積の形で表せば、光学系の働きを正確にとらえることができる。素子の作用を数学的に表す方法は、偏光状態を表すジョーンズ・ベクトル、ストークス・ベクトルに従ってそれぞれジョーンズ行列、ミュラー行列の2種類がある。

ジョーンズ行列は、偏光状態を表すジョーンズ・ベクトルと、それに光学素子が作用した結果得られる偏光状態とをつなぐもので、光学素子の働きを 2×2 の行列で表したものである。それ故、素子の組み合わせの働きはジョーンズ行列の演算（掛け算）によって得られる。このようにして、光学系に入射した光の偏光状態に、ジョーンズ行列をかければ射出光の偏光状態が、簡単に得られることになる。個々の光学素子の働きをジョーンズ行列で表し、次いで複数の光学素子の組み合わせの働きの例としてバンドパス・フィルター、ひずみ計、表面観測装置のエリプソメーターを解説する。

偏光状態はストークス・ベクトルによっても表せる。ストークス・ベクトルは4行1列のベクトルであるから、それに作用する光学素子の働きは4行4列の行列（ミュラー行列という）で表すことになる。幾つかの光学素子のミュラー行列について解説する。

7.1 ジョーンズ・ベクトルとジョーンズ行列

偏光状態はジョーンズ・ベクトルで表すことができることは第4章ですでに述べた。ここでそれを要約する。水平方向を x 軸、鉛直方向を y 軸方向にとり、光は z 方向に進むとすると（実験室座標系）、光の電場は

$$\mathbf{E}(z, t) = \begin{pmatrix} a_x e^{i(\omega t - kz + \delta_x)} \\ a_y e^{i(\omega t - kz + \delta_y)} \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

と書けるが、時間の原点を適当にとり、 $\delta_0 = \delta_y - \delta_x$ と置けば、光の電場はいつでも

$$\mathbf{E}(z, t) = \begin{pmatrix} a_x e^{i(\omega t - kz)} \\ a_y e^{i(\omega t - kz + \delta_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y e^{i\delta_0} \end{pmatrix} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \quad (7.2)$$

と書ける。この状態を表すのにジョーンズ・ベクトルでは共通の位相項 $e^{i(\omega t - kz)}$ を省略し、光の強度を 1、すなわち $|\mathbf{E}|^2 = a_x^2 + a_y^2 = 1$ と規格化する。それ故、偏光状態の一般式、すなわち楕円偏光のジョーンズ・ベクトルは次のように表せる。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y e^{i\delta_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \cdot e^{i\delta_0} \end{pmatrix}, \quad \cos \gamma = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} \quad (7.3)$$

ここでは E_x 成分を基準とし、プラスにとったが一般にはこの制限は必要ない。(7.3) 式のようにとると、直線偏光は $\delta_0 = 0, \pi$ だから、水平方向の直線偏光を \mathbf{E}_{lx} 、鉛直方向の直線偏光を \mathbf{E}_{ly} と書くと、

$$\mathbf{E}_{lx} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{ly} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

同様にして 45° 、 135° の直線偏光は

$$\mathbf{E}_{l45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{l135} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

左、右回り円偏光は

$$\mathbf{E}_{LC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{左回り円偏光} \quad \mathbf{E}_{RC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{右回り円偏光} \quad (7.6)$$

と表される。

偏光子の作用について考えてみよう。なお、以下では偏光子、補償板とも表面反射は無く、透過軸方向の電場については完全に透明であると仮定する。(7.3)式で表される入射光に直線偏光子を水平方向 (x 方向) を透過軸になるように配置すると、偏光子を通った後の出射光は水平成分 $\cos \gamma$ だけである。これを入射電場 (7.3) 式に作用して $\cos \gamma$ の出力になるような行列を考えると、出射光の電場を \mathbf{E} で表すと (行列の積については付録 D 行列と行列式参照)

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \cdot e^{i\delta_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

と書ける。これより直線偏光子の働きは、透過軸が x 軸のときを $\tilde{\mathbf{C}}_{lx}$ 、同様に透過軸が

y 軸のときを \tilde{C}_{ly} と書くと、

$$\tilde{C}_{lx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{ly} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

と表せることが推察できよう。例として、 45° 方向に偏光した直線偏光が x 軸に透過軸を持つ直線偏光子に入射すると、直線偏光子から出射する光は

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \tilde{C}_{lx} \mathbf{E}_{45^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

となる。これより透過軸 x 方向の偏光子を透過する光の強度 $|\mathbf{E}|^2$ は入射強度の 1/2 になることがわかる。このように光学素子の働きは 2 行 2 列の行列で表すことができる。この行列をジョーンズ行列という。

直線偏光子の透過軸 (x' 軸) が水平軸から α ずれている場合の作用を考えてみよう (図 7.1)。座標系を $X'Y'$ 系にとって考えると、この座標系で表される入射光の電場 \mathbf{E}'' は、第 3 章 3.2 節図 3.5 で説明したように、

$$\begin{pmatrix} E_x'' \\ E_y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha \\ -E_x \sin \alpha + E_y \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

と書ける。この変換を $\mathbf{E}'' = \tilde{R}(\alpha)\mathbf{E}$ と書く

と、座標変換の行列は

$$\tilde{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

電場を $X'Y'$ 座標系で表示すると、直線偏光子の透過軸と X' 軸が一致するから、 \tilde{C}_{lx} の

直線偏光子をとおると、得られる電場は

(7.10) 式に左から \tilde{C}_{lx} をかければよいことになる。これを行列の掛け算で表すと

$$\begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

となる。この通過後の光の電場を $-\alpha$ 回転して元の実験室系の座標にもどせば、元の座標系

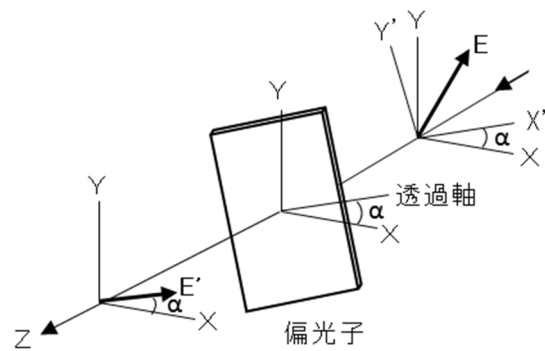


図7.1 座標軸と偏光軸

でみた電場となる。その回転は $\tilde{R}(-\alpha)$ であるから

$$\mathbf{E}' = \tilde{R}(-\alpha)\tilde{C}_{l\alpha}\tilde{R}(\alpha)\mathbf{E} \quad (7.13)$$

具体的に表示すると、偏光状態 \mathbf{E} の光が透過軸が水平軸から α 傾いた偏光子を通過すると、通過後の偏光状態 \mathbf{E}' は、

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

これにより透過軸が x 軸から α 傾いた直線偏光子の働きを表すジョーンズ行列 $\tilde{C}_{l\alpha}$ は

$$\tilde{C}_{l\alpha} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

例として x 軸に対して 45° 傾いた方向に透過軸を持つ直線偏光子の作用 \tilde{C}_{l+45° は

$$\tilde{C}_{l+45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

同様にして x 軸に対して -45° 傾いた方向に透過軸を持つ直線偏光子の作用 \tilde{C}_{l-45° は

$$\tilde{C}_{l-45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

と表せる。

これまで述べてきた考え方は全ての素子に応用できるから、素子の働き \tilde{C} は素子の X 軸が水平軸（実験室座標系の X 軸）から α ずれているとき、

$$\mathbf{E}' = \tilde{R}(-\alpha)\tilde{C}\tilde{R}(\alpha)\mathbf{E} \quad (7.18)$$

で得られる。なお、座標変換については、次のことを付け加えておこう。 $X'Y'$ 座標系で表示されている電場ベクトルを XY 座標系で表すときは逆回転になるから $\alpha \rightarrow -\alpha$ の変換をすればよい。

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \tilde{R}(-\alpha) \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

元に戻す操作は $\tilde{R}(-\alpha)$ で表される。 XY 座標系から $X'Y'$ 座標系に変換し、それを再び元

の XY 座標系で表す過程は

$$\tilde{R}(-\alpha)\tilde{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

と単位行列になって、当然であるが元の表示に戻ることが確かめられる。また、 $\tilde{R}(\alpha)$ の逆行列

$$\tilde{R}^{-1}(\alpha) = \tilde{R}(-\alpha) \quad (7.21)$$

も (7.20) 式から明らかであろう。

座標回転 α を行い、その後で座標回転 β を続けて行うことは、回転 $\alpha + \beta$ を行うことと同じであるから、

$$\tilde{R}(\alpha)\tilde{R}(\beta) = \tilde{R}(\alpha + \beta) \quad (7.22)$$

が成り立つ。このことは (7.11) 式を (7.22) 式に代入し、三角関数の加法定理を使って直接確かめることもできる。

・ 1/4 波長板

1/4 波長板の働きについて考えてみよう。図 6.9 のように slow 軸を水平方向 (x 軸)、fast 軸を垂直方向 (y 軸) に配置する。出射光の位相は x 成分を基準にとると、y 成分の位相がそれより $\frac{\pi}{2}$ 早くなるから、1/4 波長板の働きを $\tilde{C}_{1/4}$ で表すと、

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \tilde{C}_{1/4} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \cdot e^{i\delta_0} \end{pmatrix}$$

のように書けるので

$$\tilde{C}_{1/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

で表せる。ここで座標軸の選び方に注意が必要である。座標軸として、x 軸を fast 軸に、y 軸を slow 軸に選べば、電場の y 成分の位相が遅れるので、1/4 波長板では $\delta = \frac{\pi}{2}$ を $-\frac{\pi}{2}$ に置き換えなければならない。

・ 1/2 波長板

1/2 波長板の働きを $\tilde{C}_{1/2}$ と書くと、(6.11) 式より出力側では位相差は $\delta = \pi$ になるので

$$\tilde{C}_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

と表せる。これらの考察から補償板の挿入によって y 軸 (fast 軸) 方向が x 軸 (slow 軸) に対して δ 早まるとすると

$$\tilde{C}_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

と表せることも理解されよう。slow 軸と fast 軸に偏光した光の位相差が問題であるから、 \tilde{C}_δ は (7.25) 式でもよいし、

$$\tilde{C}_\delta = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

と書いてもよい。

1/4 波長板 $\tilde{C}_{1/4}$ 、1/2 波長板 $\tilde{C}_{1/2}$ についても同じことが言える。1/4 波長板、1/2 波長板では δ はそれぞれ $\pi/2$, π である。

7.2 ジョーンズ行列の応用例

補償板の働きを例題で具体的に見てみよう。例えば、 45° 方向に直線偏光した光が 1/4 波長板を通った後では(図 7.2)、(7.5)、(7.23) 式から、

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

となり、(7.6) 式より右回り円偏光が得られること、光の強度は変わらずに保たれていることも分かる。同様に 135° 方向に直線偏光した入射光が同じ配置の 1/4 波長板を通ると

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

となり、左回りの円偏光となって出射することがわかる。また逆に右回りの円偏光が 1/4 波長板に入射すると

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

となり、(7.5) 式より 135° の直線偏光が得られることがわかる。

図 7.2 に示すように、 45° 直線偏光が $1/4$ 波長板を通ると右回り円偏光として出射する。この逆過程を考えてみよう。逆過程では、光が逆に進むので z 軸の方向も光の進行方向にとらなければならないから、 z 軸が逆方向を向く新座標系 (赤で示されている) で考えなければならない。この新座標系では逆に進む光の偏光はやはり右回り円偏光となるのでその偏光の光が $1/4$ 波長板に入射することになる。その結果 $1/4$ 波長板を通過した後は (7.29) 式により 135° の直線偏光が出射するが、これも座標系が図のように x 軸を逆にとらなければならないので、得られた直線偏光は図に示すように、元の方向を向いた直線偏光になっている。これより光は逆進させると同じ状態に戻って来ることがわかる (光の逆進の法則)。

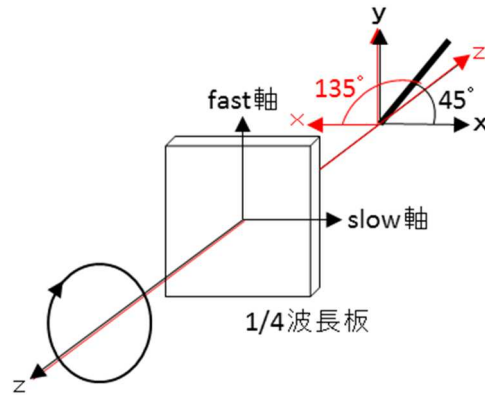


図7.2 $1/4$ 波長板

なお、上の議論は逆方向に光が進むときの座標系で、 $1/4$ 波長板の **slow** 軸はやはり x 軸 (赤字座標) になっているので $1/4$ 波長板のジョーンズ行列は (7.23) 式がそのまま使えるのである。

図 7.2 に戻ろう。図で入射光は 45° に直線偏光しているとしたが、この 45° 偏光を作るために、 $1/4$ 波長板の **slow** 軸に対して 45° 方向に透過軸を持つ直線偏光子を $1/4$ 波長板の前に貼り付けて一体とする。この光学素子は任意に偏光した入射光から右回り円偏光成分のみを取り出す素子として働く。このような素子を円偏光子という。すなわち、 45° 偏光子と $1/4$ 波長板で構成された素子である。この円偏光子に $1/4$ 波長板側から光を入射させると、入射光が右回り円偏光ならば x 軸に対して 135° 傾いた直線偏光となって出射する (図 7.2 の赤色座標系)。逆に左回りの円偏光が入射するとこの円偏光子によってブロックされてしまう。

直線偏光子の透過軸が $1/4$ 波長板の **slow** 軸に対して -45° になるようにセットすれば、左回り円偏光を取り出す円偏光子となる。その働きは右回り円偏光子と相補的になっている。

7.2.1 バンドパス・フィルター

ジョーンズ行列表示を使って光学素子の働きを求める例としてバンドパス・フィルター (bandpass filter) として知られるリオ・オーマン・フィルター (Lyot-Ohman-filter) を解説する。このフィルターは、透過軸が平行な偏光子の間に、異方軸が透過軸に対して 45° 傾いた複屈折板 (補償板) を図 7.3 のように交互に並べた構造をしている。ただし、

補償板の厚さは $d, 2d, 4d, \dots, 2^{N-1}d$ の N 枚が連なっている。厚さ d の補償板の働きを表

す行列は (7.25) 式より

$$\tilde{C}_\delta = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ただし、} \delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_s - n_f)d \quad (7.30)$$

偏光子の透過軸を水平軸 (x 軸) にとると、最初の偏光子を通った光のジョーンズ・ベク

トルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で表せるから、 45° 傾いた補償板を通った光は (7.18) 式で $\alpha = 45^\circ$ として、

(7.11)、(7.30) 式から

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ i \sin \frac{\delta}{2} \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

この光が次の偏光子を通ると、偏光子の透過軸は x 軸なので、(7.8) 式より

$$\mathbf{E}_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{E}' = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

となり、振幅 1 で入射

した光は振幅 $\cos \frac{\delta}{2}$ の

透過光になる。次の厚

さ $2d$ の補償板と偏光

子を通ると、(7.30)

式の δ は、 $d \rightarrow 2d$

となるから、 2δ とな

るので、透過光の振幅

は $\cos \frac{2\delta}{2} = \cos 2 \cdot \frac{\delta}{2}$

となるので、2 枚の補

償板を通った後の光の

振幅は

$$\cos \frac{\delta}{2} \cos 2 \cdot \frac{\delta}{2}$$

となる。これが次々と続くので、 N 枚目の補償板 (厚さ $2^{N-1}d$) と偏光子を通った後の光の強度は、振幅の自乗であるから、入射強度に対して

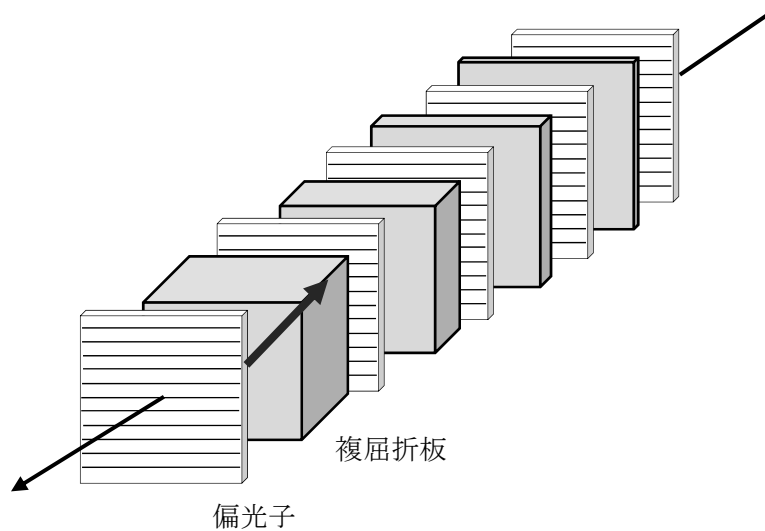


図 7.3 リオ・オーマン・フィルター

$$T = \cos^2 x \cos^2 2x \cos^2 4x \cdots \cos^2 2^{N-1} x = \left(\frac{\sin 2^N x}{2^N \sin x} \right)^2 \quad (7.33)$$

$$\text{ただし、 } x = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} (n_s - n_f) d$$

右辺を得るには、 $\sin x \cos x = 2^{-1} \sin 2x$ の三角関数の公式を利用する。(7.33) 式は自乗の式で書いてあるので、自乗する前の元の式で考える。式の両辺に左から $\sin x$ をかけると、左辺は $\sin x \cos x = 2^{-1} \sin 2x$ となるが、この結果に次の $\cos 2x$ との積は $2^{-1} \sin 2x \cos 2x = 2^{-2} \sin 4x$ が得られる。この操作を続けることによって (7.33) 式が得られる。

このフィルターは x が π の整数倍 $M\pi$ のとき、透過率が 1 になる。分母の 2^N のために x が $M\pi$ からずれると透過率が急激に 0 になるので、バンドパス・フィルターになる。図 7.4 は水晶でフィルターを作成した場合の計算例である。使用したパラメータは

$$n_f = n_o = 1.5416, \quad n_s = n_e = 1.5506, \quad \lambda = 600\text{nm}$$

$x=10\pi$ 、すなわち、最初の水晶板の厚さは $d = 0.667\text{ mm}$ で、水晶板を $N=5$ 枚重ねた例である。

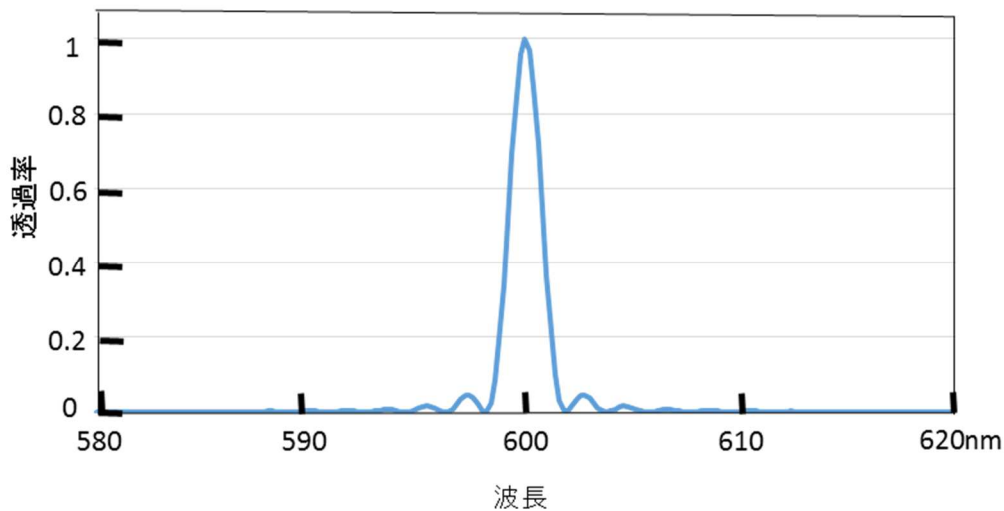


図7.4 バンドパス・フィルター

透過光の半値幅は $2^N d$ で決まるので、幅の狭いフィルターを作るには最後の水晶板を厚くすればよい。逆に薄い板を使用すれば幅の広いバンドパス・フィルターになる。また、 N を増やせば、サイドバンドの強度が抑えられる。さらに、水晶などの固定屈折率を持つ材料以外に、液晶を使い、印加電圧を制御することによって屈折率の差 $\Delta n = n_s - n_f$

を変え、透過光のピーク波長を変える、波長可変フィルターとしての使用も提案されている。

- 1) O.Aharon and I. Abdulhalim: PIERs Online **5**, 555(2009)
- 2) J. Beeckman, T. Hui, P. J. M. Vanbrabant, R. Zmijan and K. Neyts: Mol.Cryst. Liq. Cryst. **502**, 19(2009)

7.2.2 ひずみ計

a) 円偏光を用いた場合

図 7.5 のような光学系を、ジョーンズ行列を用いて解析してみよう。この光学系はひずみ計として、ひずみの検出に利用されている。光学系は無偏光の光源 (S) からの光を、偏光子を通して直線偏光にし、その後ろに 1/4 波長板を、偏光子の透過軸に対して slow 軸を 45° 傾けておく。こうすることによって、1/4 波長板を透過した光は図 7.2 に示したように右回り円偏光になる。この円偏光を試料板に入射させ、試料を透過した光を 1/4 波長板とこれに 45° の方向に透過軸を持つ偏光子に通し、その透過光を観測する。

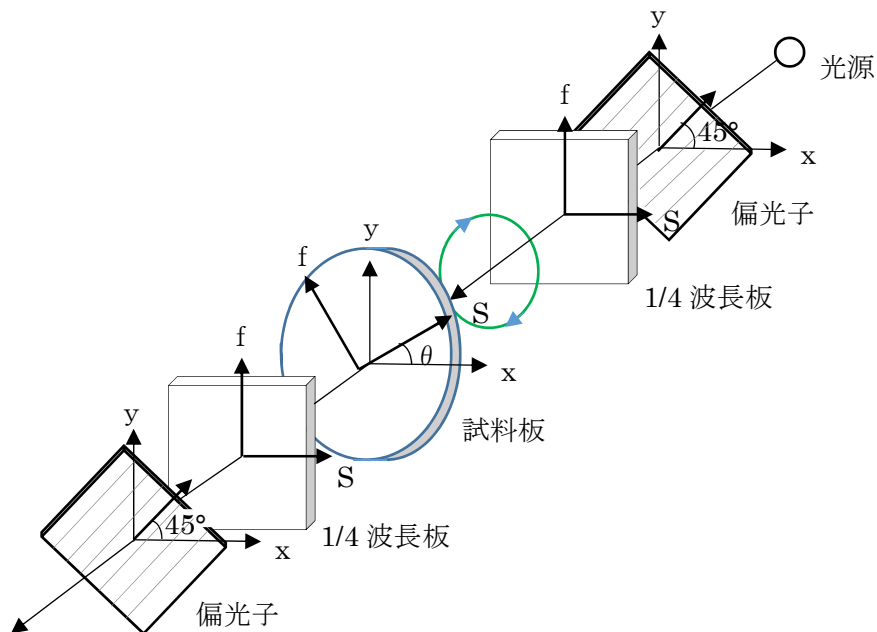


図 7.5 ひずみの検出(円偏光)

試料板には一般に様々なひずみが存在するが、ここでは簡単化して試料板には一様なひずみがあり、そのひずみにより一軸性異方性が生じているものとする (この項については第 8 章 1 節参照)。試料板の光学軸 (slow 軸とする) とそれに垂直な軸 (fast 軸) との位相差は δ であるとする、試料板のジョーンズ行列は (7.25) 式により

$$\tilde{C}_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

となる。

上に述べたように光源から出た光が図 7.5 のように配置された偏光子と 1/4 波長板を通ると右回り円偏光になる。出射するのは円偏光であるから、偏光子と 1/4 波長板を 1 組のセットとして回転する限り、円偏光は影響を受けないので、座標軸は任意の方向でよい。図では便宜上、1/4 波長板の slow 軸を x 軸にとった。光は z 方向に進むとしている。

この右回り円偏光が、slow 軸が x 軸と θ の角をなす試料板に入射し、その後 1/4 波長板、この 1/4 波長板の slow 軸に対して 45° 傾いた透過軸を持つ偏光子を通る。

入射する右回り円偏光の電場ベクトルを \mathbf{E} とする。そのジョーンズ・ベクトルは

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ で表される。透過光の電場ベクトルと \mathbf{E}' とすると、図を参照にして、ジョーンズ行列を使って表すと、

$$\mathbf{E}' = \tilde{R}(-45^\circ) \tilde{C}_h \tilde{R}(45^\circ) \tilde{C}_{1/4} \tilde{R}(-\theta) \tilde{C}_\delta \tilde{R}(\theta) \mathbf{E} \quad (7.35)$$

具体的に数値を入れて書き下すと、 $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sin \frac{\delta}{2} \cdot e^{-i\left(\theta + \frac{\delta}{2}\right)} \end{aligned} \quad (7.36)$$

透過光の強度は $\langle |\mathbf{E}'|^2 \rangle = \sin^2 \frac{\delta}{2}$ になるので、透過光強度は試料板の位相差のみで決まり、

試料板の傾き θ 、すなわち、ひずみの向きには無関係である。入射円偏光の強度を I_0 とす

ると、試料を透過した光の強度は

$$I = I_0 \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad (7.37)$$

となる。

試料板がなければ、あるいは試料板が等方媒質であれば、位相差 δ はゼロになり、光は完全にブロックされる。これは光学系の構成から当然なことである。すなわち、試料板が等方媒質であれば 2 枚の 1/4 波長板を重ねておくことになるので、1/2 波長板を置いたことと同じことになり、1/2 波長板は入射直線偏光の方向を 2θ 回す働きをするので (71P 参照)、図のように slow 軸に対して 45° に偏光子の透過軸を置くとその直線偏光の向きは 90° 回転することになり、それは出射側の偏光子によって完全にブロックされるのである。もし、試料板内にひずみがあると、そのひずみによって光学的異方性が生じ、しかも

光学異方性に分布があると、すなわち、ひずみに分布があると、その分布を透過強度の分布として直接観測できることになる（第8章1節参照）。

透過強度が位相差のみで決まり、異方軸の方向によらないことは重要である。このような結果が得られたのは測定に円偏光を用いたことによる。

b) 直線偏光を用いた場合

試料板の異方性は、直交する2つの偏光子の間に試料板を挟んで透過強度を測ることによっても観測できる。このときは試料板の光学軸と偏光子の透過軸の相対的な関係が重要になる。光学軸がどちらかの偏光子の透過軸と一致すると光はブロックされる。試料を回転すると透過強度もそれにつれて変化する。このことを具体的に見てみよう。図7.5で2つの1/4波長板を取り除き、残った2つの偏光子はその透過軸を直交させる（図7.6）。図のように偏光子と検光子（偏光子）の間に試料板を置いた時の透過光強度は

$$\mathbf{E}' = \tilde{\mathbf{C}}_y \tilde{\mathbf{R}}(-\theta) \tilde{\mathbf{C}}_\delta \tilde{\mathbf{R}}(\theta) \tilde{\mathbf{C}}_x \mathbf{E} \quad (7.38)$$

と表せる。ここで、座標軸の選び方は任意にできるから、入射側の偏光子の透過軸を水平軸（x軸）に選んだ。検光子はそれと直交するように、透過軸を垂直軸（y軸）にとった。この配置では試料板が等方媒質である場合には光は透過せず暗いので、試料板にわずかな位相差があったとき、それを感度よく検出できる。

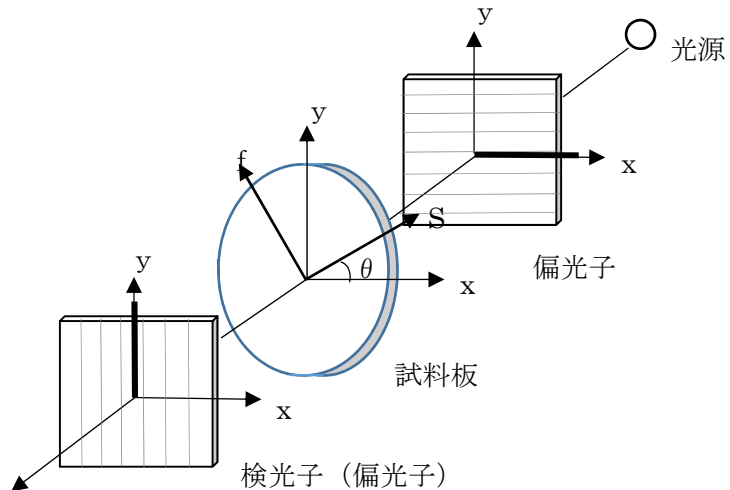


図 7.6 ひずみの検出（直線偏光）

(7.38) 式に具体的に数値

を代入すると、 $\tilde{\mathbf{C}}_x \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot E_x$ となるので、偏光子を通った後の光を基準にとると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot (1 - e^{i\delta}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \sin 2\theta \cdot \sin \frac{\delta}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-i e^{i\frac{\delta}{2}}) \end{aligned} \quad (7.39)$$

これより透過光強度は $\sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2}$ となり、試料板の位相差 δ に対しては $\sin^2 \frac{\delta}{2}$ の強度を持ち、また、偏光子の透過軸に対しては $\sin^2 2\theta$ で変化する。この結果、試料板を回転すると $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, と 4 回の暗点が起こる。これらの角度では試料板の光学軸が偏光子の透過軸と一致するので、試料板を通った後の偏光方向が偏光子の透過軸と同じであり、それは検光子の軸と直交するから暗点となるのである。このようにして、偏光子と検光子の組み合わせのひずみ計はひずみ方向を確定することができる。

7.2.3 エリプソメトリー

光が試料表面で反射される際は光の電場振幅の変化と位相の飛びが生じる。その変化は P 偏光と S 偏光で異なるので、入射光として直線偏光を用いるとその反射光は一般に楕円偏光になる (図 7.7)。図で入射光の電場ベクトル \mathbf{E} は P 偏光成分 E_p と S 偏光成分 E_s に分解できる。各々の成分は

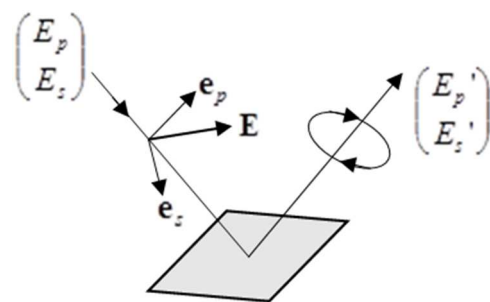


図7.7 反射による偏光状態の変化

異なる反射係数で反射し、反射光の電場ベクトル \mathbf{E}' も同様に 2 成分に分けて記述できる。反射係数は入射角、試料の光学定数 (屈折率 n 、減衰係数 κ)、および試料の表面状態によって決まる (第 2 章参照)。また、試料が薄膜である場合には膜の裏面からの反射や膜の光吸収も関係するので、反射光はその膜厚にも敏感で、0.1nm の感度で膜厚を測定できるといわれている。このように反射光を観測すれば試料の物性や膜形成過程を精度よく測定できる。このような反射測定装置をエリプソメトリーという。以下でこの装置の測定原理をジョーンズ行列を用いて説明する。S,P 偏光の反射係数を r_s, r_p とすると、それは (2.2) 式及び (2.3) 式で与えられる。その式で屈折率は、試料が不透明の場合には、屈折率 n を複素屈折率 $n - i\kappa$ で置き換えねばならない。それ故、反射係数も複素数になるので

$$r_s = |r_s|e^{i\delta_s}, r_p = |r_p|e^{i\delta_p} \quad (7.40)$$

と書ける。

S,P の方向を x, y 軸にとれば、反射を表すジョーンズ行列 \tilde{r} は

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} r_s & 0 \\ 0 & r_p \end{pmatrix} = r_0 \begin{pmatrix} \sin \chi & 0 \\ 0 & \cos \chi e^{i\Delta} \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

$$\text{但し } r_0 = (r_s r_s^* + r_p r_p^*)^{\frac{1}{2}} e^{i\delta_s}, \quad \tan \chi = \frac{|r_s|}{|r_p|}, \quad \Delta = \delta_p - \delta_s,$$

である。

図 7.8 に代表的な測定装置の例を示す。光源 S からの光を偏光子で直線偏光にする。試料への入射角は任意でもよいが、ブリュースタ角近辺にとると屈折率の値を敏感に測定できる。直線偏光

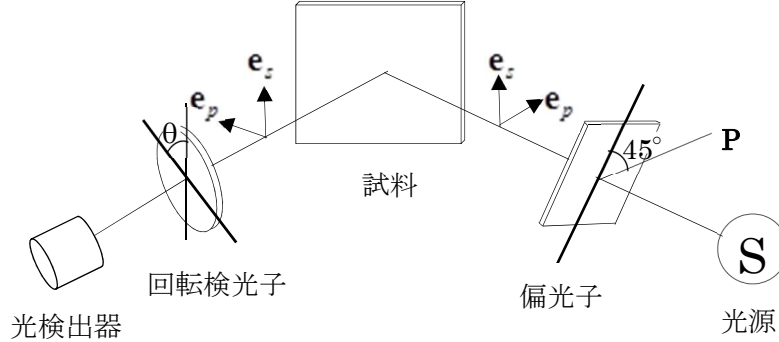


図 7.8 回転検光子型エリプソメトリー

の偏光方向は通常、S,P 偏光成分が等量になるように、水平軸 (P 偏光方向、図 7.8 参照) に対して 45° にとることが多い。試料で反射した反射光は回転できるようにセットされた偏光子 (回転検光子) を通り、光検出器で検出される。偏光子を出た光の電場を \mathbf{E} 、光検出器に達した光の電場を \mathbf{E}' とすると、この過程は $\mathbf{E}' = \tilde{\mathbf{R}}(-\theta) \tilde{\mathbf{C}}_k \tilde{\mathbf{R}}(\theta) \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{E}$ となる。観測される光強度に関係するのは回転検光子を出た電場で、座標を元に戻す必要はないから、計算を簡単化して $\tilde{\mathbf{R}}(-\theta)$ を無視してよい。図のように偏光子が 45° にセットされているとして具体的に書き下すと、

$$\mathbf{E}' = E_0 r_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \chi & 0 \\ 0 & \cos \chi e^{i\Delta} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

これにより測定される光強度 I は $\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}'^*$ に比例するから、

$$I = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}'^* = I_0 (1 - \cos 2\theta \cos 2\chi + \sin 2\theta \sin 2\chi \cos \Delta) \quad (7.43)$$

ここで I_0 は定数で、入射光強度と反射率に比例する量である。出力は検光子の回転角に対して 2θ で依存しているが、これは透過軸に上下の区別がない、すなわち、 $\theta, \theta + 180^\circ$ は同一状態で、検光子を 180° 回転させると元に戻るためである。回転検光子を角速度 ω で回転させれば、 $\theta = \alpha t$ だから出力 I は

$$I = I_0 (1 - \cos 2\chi \cos 2\alpha t + \sin 2\chi \cos \Delta \sin 2\alpha t) = I_0 (1 + A \cos(2\alpha t + \delta)) \quad (7.44)$$

振幅と位相の遅れから χ , Δ を求めることができる。なお、位相差 Δ が $\cos\Delta$ の形で入っているために Δ の符号が定まらない。これはこの装置では楕円偏光の回転方向が定まらないことを意味している。

楕円偏光の回転方向も求めるためには反射光を円偏光子を通して観測する必要がある。楕円偏光の回転方向を決め、反射光の情報を完全に得るためには図 7.9 のように、試料と検光子の間に 1/4 波長

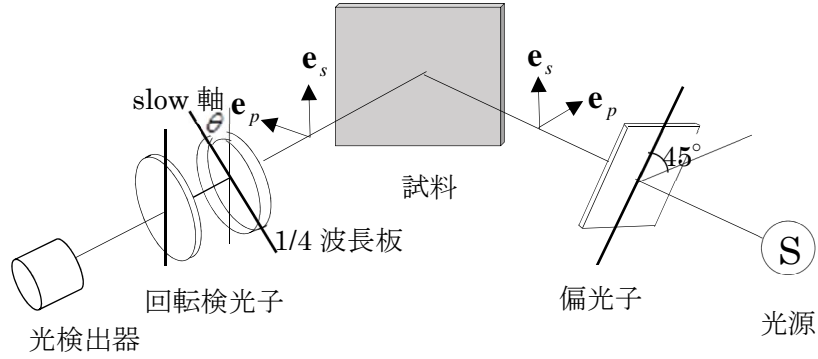


図 7.9 回転補償板型エリプソメトリ

板を挿入すればよい。説明を簡単にするために、入射光は 45° の直線偏光とし、検光子の透過軸は垂直軸 (x 軸、ここでは S 偏光方向) と平行にとるとする。1/4 波長板の slow 軸が x 軸となす角を θ とする。このような配置では出射光の電場 \mathbf{E}' は

$\mathbf{E}' = \tilde{\mathbf{C}}_{\lambda} \tilde{\mathbf{R}}(-\theta) \tilde{\mathbf{C}}_{\lambda} \tilde{\mathbf{R}}(\theta) \tilde{\mathbf{r}} \mathbf{E}$ である。これを具体的に書き下すと、(7.23) 式、(7.41) 式から、

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\chi & 0 \\ 0 & \cos\chi e^{i\Delta} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

ただし、入射光強度 E_0 、反射係数 r_0 は省略した。この式を計算すると、出射光の電場は x 成分だけで、その値は

$$E_x' = \sin\chi(\cos^2\theta + i\sin^2\theta) + (1-i)\cos\theta\sin\theta\cos\chi e^{i\Delta} \quad (7.46)$$

となる。検出器で検出される光強度は $E_x' \cdot E_x'^*$ に比例するから、

$$I = I_0 \left[2 - 2\cos^2 2\theta \cos 2\chi + \sin 4\theta \sin 2\chi \cos \Delta + 2\sin 2\theta \sin 2\chi \sin \Delta \right] \quad (7.47)$$

I_0 は定数で、入射光強度と反射率に比例する量である。(7.47)式により、位相差 Δ は符号も含めて決定できる。検光子の透過軸と 1/4 波長板の slow 軸を一致させれば、上式から、 $\theta=0$ とおいて、 $I = 4I_0 \sin^2 \chi$ が得られる。検光子の透過軸を 1/4 波長板の slow 軸、あ

あるいは fast 軸と一致させれば、それは直線偏光子と同じ働きをするので、それを s 偏光の方向と一致させれば、S 偏光の反射率 $|r_s|^2 = r_0^2 \sin^2 \chi$ が得られるのである。この状態で 2 つの光学素子を同時に回して、その透過軸を P 偏光方向と一致させれば、P 偏光の反射率 $|r_p|^2 = r_0^2 \cos^2 \chi$ が得られる。(7.47) 式に戻って、波長板の slow 軸を $\theta = \pm 45^\circ$ にとると

$$I = I_0(2 \pm 2 \sin 2\chi \sin \Delta), \quad \theta = \pm \frac{\pi}{4} \quad (7.48)$$

となり、位相差 Δ は符号も含めて決定できる。

7.3 ストークス・ベクトルとミュラー行列

偏光状態を数学的に表す方法には 3.2 節で述べたストークス・パラメータを使う方法もある。光の偏光状態を 4 行 1 列のストークス・ベクトルで表すので、ジョーンズ・ベクトルよりも複雑であるが、ストークス・ベクトルは完全偏光状態ばかりでなく部分偏光状態も含めて記述できる利点がある。各偏光状態を表すストークス・ベクトルは (3.46) 式に値を代入して得られる。代表的な偏光のストークス・ベクトルは表 3.1 にまとめてある。

光学素子の作用は入射光と出射光のストークス・ベクトルをつなぐ 4 行 4 列のマトリックス、これをミュラー行列(Mueller Matrix)という、で表示する。直線偏光子の作用を考えてみよう。一般に光学素子には光吸収がある。光波がこの光学素子を通ると、その電場の振幅が吸収によって減少する。その振幅減少率が x 方向の電場に対して p_x 、y 方向の電場に対して p_y とする。

$$0 \leq p_x \leq 1, \quad 0 \leq p_y \leq 1 \quad (7.49)$$

である。 $p = 0$ は完全吸収を表し、 $p = 1$ は完全透過(吸収無し)を表している。これより、例えば x 方向の電場に対しては、入射光の振幅 a_x に対して出射光の振幅は $p_x a_x$ となる。x, y 方向の電場には位相差が生じないので、入射光のストークス・ベクトル \mathbf{S} 、出射光のそれを \mathbf{S}' とすると(3.3.1 節 偏光とストークス・パラメータ参照)、

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} a_x^2 + a_y^2 \\ a_x^2 - a_y^2 \\ 2a_x a_y \cos \delta \\ 2a_x a_y \sin \delta \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} p_x^2 a_x^2 + p_y^2 a_y^2 \\ p_x^2 a_x^2 - p_y^2 a_y^2 \\ 2p_x p_y a_x a_y \cos \delta \\ 2p_x p_y a_x a_y \sin \delta \end{pmatrix} \quad (7.50)$$

と書ける。これらを 4 行 4 列のマトリックス $\tilde{\mathbf{M}}$ が繋ぐとすると、 $\mathbf{S}' = \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{S}$ である。マト

リックス $\tilde{\mathbf{M}}$ は次のようになることは実際に代入して計算すれば明らかである。

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{pmatrix} \quad (7.51)$$

この光学素子は位相を変えず、 x 、 y 方向の電場強度に変化をもたらすので直線偏光子の働きがある。その直線偏光子のミュラー行列が(7.51)式である。

水平方向 (x 軸方向) のみが透過する完全直線偏光子は $p_x = 1$, $p_y = 0$ と置けばよいから、これらの値を代入すると、

$$\tilde{\mathbf{M}}_{lx} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

となる。これがジョーンズ行列の (7.8) 式の $\tilde{\mathbf{C}}_{lx}$ に対応するミュラー行列である。

同様にして y 方向のみを透過する直線偏光子は $p_x = 0$, $p_y = 1$ と置けばよいから

$$\tilde{\mathbf{M}}_{ly} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.53)$$

となる。これがジョーンズ行列の (7.8) 式の $\tilde{\mathbf{C}}_{ly}$ に対応する行列である。この表示の応用例として互いに直交するように置かれた偏光子の作用はどのようになるであろうか。この場合は、作用はまず $\tilde{\mathbf{M}}_{lx}$ が作用し、その結果に $\tilde{\mathbf{M}}_{ly}$ が作用する。その結果は $\mathbf{S}' = \tilde{\mathbf{M}}_{ly} \tilde{\mathbf{M}}_{lx} \mathbf{S}$ となる。行列の掛け算を実行すると

$$\tilde{\mathbf{M}}_{ly} \tilde{\mathbf{M}}_{lx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.54)$$

となり、出射光は 0 となる。これは直交しておかれた偏光子は光を完全に遮断することを数式で示したものとなっている。

もし、 $p_x = p_y = p$ と x 、 y 方向とも同じ透過係数 p であるとき、

$$\tilde{M}_{ND} = p^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.55)$$

となる。これは ND (ニュートラル) フィルターのミュラー行列で、行列の係数に p^2 があることは、エネルギーの透過率が p^2 であることを示している。

補償板について考えてみよう。図 7.10 のように X 軸が slow 軸、Y 軸が fast 軸であるとき、補償板を透過した後の Y 軸方向の電場の位相が、X 軸方向のそれに対して加えて ϕ だけ早くなるとする。この時、補償板通過後の Y 軸方向の電場の位相は、X 軸方向の電場に対してもともと δ 早かったうえに ϕ が加わるから、 $\delta + \phi$ になるので、出射光のストークス・ベクトルは

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} a_x^2 + a_y^2 \\ a_x^2 - a_y^2 \\ 2a_x a_y \cos(\delta + \phi) \\ 2a_x a_y \sin(\delta + \phi) \end{pmatrix} \quad (7.56)$$

となる。三角関数の公式 (付録 A, A5, A6 式参照)

$$\cos(\delta + \phi) = \cos \delta \cos \phi - \sin \delta \sin \phi$$

$$\sin(\delta + \phi) = \sin \delta \cos \phi + \cos \delta \sin \phi$$

を使えば、入射光 \mathbf{S} と出射光 \mathbf{S}' をつなぐミュラー行列 \tilde{M} は

$$\tilde{M}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (7.57)$$

となることは容易に確かめられるだろう。

1/4 波長板のミュラー行列は、1 波長の 1/4 に相当する位相差 $\phi = \pi/2$ を代入すればよいから、

$$\tilde{M}_{1/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.58)$$

1/2 波長板のミュラー行列は、同様にして、(7.57) 式に $\phi = \pi$ を代入して

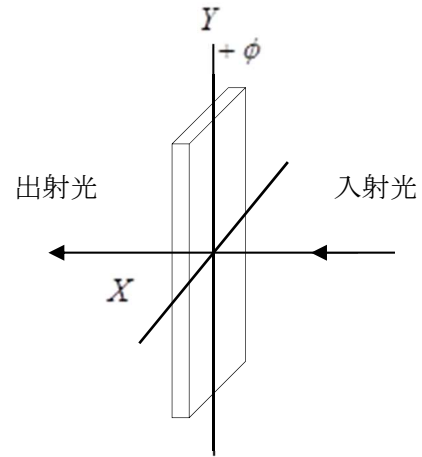


図 7.10 補償板。slow 軸 (X 軸) に対して Y 軸方向の位相は ϕ だけ早い

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.59)$$

得られた結果を使って、簡単な応用例を考えてみよう。図 7.1 のように光源から出た光が、水平軸に対して 45° に透過軸を持つ偏光子を通り、次いで slow 軸が水平軸と平行な $1/4$ 波長板を透過した光の偏光状態をストークス・ベクトルとミュラー行列を使って求めてみよう。水平軸から 45° 傾いた直線偏光のストークス・ベクトルは表 3.1 より、

$\mathbf{S} = (1 \ 0 \ 1 \ 0)$ (スペースを節約するために 1 行 4 列で記した) であるから、 $\tilde{\mathbf{M}}_{\frac{1}{4}} \mathbf{S}$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.60)$$

これは表 3.1 より、右回り円偏光である。すなわち、 45° 直線偏光子 + $1/4$ 波長板は右回り円偏光子の働きがあることが分かる。この結果は図 7.1 に示されている。同様にして -45° 直線偏光子 + $1/4$ 波長板は左回り円偏光子となることが確かめられる。

$1/2$ 波長板の働きをミュラー行列を使って求めてみよう。 $1/2$ 波長板に楕円偏光が入射した場合を考える。楕円偏光状態のストークス・ベクトル表示は幾つかあるが、ここでは (3.78) 式の最後の表示を用いる。 $\mathbf{S} = (1 \ \cos 2\beta \cos 2\alpha \ \cos 2\beta \sin 2\alpha \ \sin 2\beta)$ 、ここで α は方位角で、楕円の長軸の水平軸からの傾きを表す。一方、 β は楕円率角で、半長径 a と半短径 b の比を角度で表したもので $\tan \beta = \pm b/a$ である。偏光の回転方向は β の符号で表す、すなわち、 $\beta > 0$ で右回り楕円偏光、 $\beta < 0$ で左回り楕円偏光を表す。 $1/2$ 波長板を透過後の偏光状態は $\tilde{\mathbf{M}}_{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{S}$ を計算すればよいから、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\beta \cos 2\alpha \\ \cos 2\beta \sin 2\alpha \\ \sin 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\beta \cos 2\alpha \\ -\cos 2\beta \sin 2\alpha \\ -\sin 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(-2\beta) \cos(-2\alpha) \\ \cos(-2\beta) \sin(-2\alpha) \\ \sin(-2\beta) \end{pmatrix} \quad (7.61)$$

最後の式に移る際には $\sin \theta = -\sin(-\theta)$, $\cos \theta = \cos(-\theta)$ を使った。この結果から $1/2$ 波長板の働きは $\beta \rightarrow -\beta$ に変える。これは右 (左) 回り楕円偏光を左 (右) 回り楕円偏光に変え、かつ、 $\alpha \rightarrow -\alpha$ に変えるが、これは slow 軸に対して楕円の長軸の傾きを α から $-\alpha$ に変える。すなわち、 $1/2$ 波長板の働きは、楕円偏光の形を保ちながら、回転方向を

逆転し、かつ長軸の傾きを、slow 軸を境として反転させる作用があることがわかる(これは第 6 章 1 節で述べたことの再確認になっている。図 6.11 参照)。

直線偏光子などを回転する操作も重要である。これまで光学素子の作用を表示するのに光学軸、偏光子では透過軸を水平軸 (X 軸)、あるいは垂直軸 (Y 軸) としてきた。しかしながら、光学素子を回した状態で使用する場合も多々ある。このとき、ジョーンズ・ベクトル表示では光学素子の作用 \tilde{C} は素子の回転が θ であるとき、 $\tilde{R}(-\theta)\tilde{C}\tilde{R}(\theta)$ で与えられる

((7.11) 式参照)。同様なことはストークス・ベクトル表示でも記述できるが 4 行 1 列のベクトルであり、かつストークス・ベクトルは電場ベクトルを直接記述するものになっていないので直感でその作用を表す表示を得ることはできない。

光学素子を θ 回転したとき、例えば直線偏光子の透過軸が水平軸に対して θ になるように回転したときの、素子の作用の表示を考えてみよう。素子の座標系 (光学軸を X' 軸に取る X'Y' 座標系) で入射光の電場 \mathbf{E} (ストークス・ベクトル \mathbf{S}) がどのように表されるかを考えてみる。光学素子を θ 回した素子の座標系で電場 \mathbf{E} が \mathbf{E}' と表せたとすると (図 7.1 及び(7.10), (7.11) 式参照, そこでは回転角は α になっている)

$$\mathbf{E}' = \tilde{R}(\theta)\mathbf{E}$$

である。電場 \mathbf{E} に対応するストークス・ベクトル $\mathbf{S} = (S_0 \ S_1 \ S_2 \ S_3)$ 、 \mathbf{E}' に対応するストークス・ベクトルを \mathbf{S}' とすると、 \mathbf{S}' は次のように書けることは容易に示せる。

$$\mathbf{S}' = \tilde{R}_M(\theta)\mathbf{S} \quad \tilde{R}_M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.62)$$

$\tilde{R}_M(\theta)$ がジョーンズ・ベクトルの回転 $\tilde{R}(\theta)$ に対応するストークス・ベクトルの回転操作を表すマトリックスである。

X 軸に平行な透過軸を持つ直線偏光子を θ 回転した時の偏光子の作用をミュラー行列で表すと (7.62) 式から、 $\tilde{R}_M(-\theta)\tilde{M}_x\tilde{R}_M(\theta)$ となる。これを $\tilde{M}_x(\theta)$ とかくと、

$$\tilde{M}_x(\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.63)$$

が得られる。この結果に $\theta = 0$ を代入すれば、 $\tilde{M}_x(0) = M_x$ と X 軸に透過軸を持つ偏光子

の表示が得られ、同様にして $\theta = 90^\circ$ とすれば \tilde{M}_y が得られる。これらは先に求めた

(7.52) 式と (7.53) 式に当然であるが、一致している。よく使われる 45° 回転は

$$\tilde{M}_{145^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.64)$$

(7.63) 式で表される、 θ 回転した直線偏光子にストークス・ベクトル \mathbf{S} (S_0 S_1 S_2 S_3) の光が入射したとき、出射光のストークス・ベクトル \mathbf{S}' は $\mathbf{S}' = \tilde{M}_x(\theta)\mathbf{S}$ となる。これを (7.63) 式を用いて計算すると、

$$\mathbf{S}' = \frac{1}{2} (S_0 + S_1 \cos 2\theta + S_2 \sin 2\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.65)$$

となり、入射光がいかなる偏光状態であっても出射光は常に直線偏光になる。これは直線偏光子を通過した光は常に直線偏光であることを数式で示したことになっている。

(7.62) 式の応用例として、1/4 波長板、1/2 波長板を回転させた場合のミュラー行列を求めてみよう。 θ 回転した 1/4 波長板のミュラー行列を $\tilde{M}_{1/4}(\theta)$ と記すと、

$$\tilde{M}_{1/4}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & -\cos 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \end{pmatrix} \quad (7.66)$$

同様にして 1/2 波長板のミュラー行列を $\tilde{M}_{1/2}(\theta)$ と記すと、

$$\tilde{M}_{1/2}(\theta) = \tilde{R}_M(-\theta)\tilde{M}_{1/2}\tilde{R}_M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\theta & \sin 4\theta & 0 \\ 0 & \sin 4\theta & -\cos 4\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.67)$$

が得られる。