

第 4 回

5. 結晶光学と複屈折	64
5.1 屈折率の異方性	64
5.2 異方性媒体中の平面電磁波	67
5.3 屈折率楕円体	73
5.4 位相速度と群速度	75
5.5 一軸性結晶の光学	77

5. 結晶光学と複屈折

5.1 屈折率の異方性

これまで光を伝える媒質が立方対称性を持つか、ガラスや液体のように等方均一な場合について考察してきた。そこでは電束密度 \mathbf{D} は常に電場 \mathbf{E} に平行で、かつそれらをつなぐ誘電率は電場の向きに関係なく一定であった。これに反して光学的性質が偏光方向や光の伝搬方向によって変わる媒質がある。方解石、水晶、液晶などがその例で、これらの結晶では、誘電率（屈折率）が光の伝播方向によって異なる、いわゆる、複屈折性を示す。種々の結晶について、結晶を伝わる光の性質を調べる学問が結晶光学である。光と媒質は誘電率 ϵ と透磁率 μ によって結びついているので、結晶の光学的性質は ϵ と μ の性質そのものである。結晶の光学的性質が方向によって異なる異方性は ϵ 、 μ が方向によって異なること、すなわち、 ϵ 、 μ の異方性で表される。なお、光のように振動数が大きく、したがってその磁場も急速に方向を変動する。そのような磁場に対しては透磁率を $\mu \approx \mu_0$ [真空での透磁率] としてよいので、以下では $\mu = \mu_0$ とする。

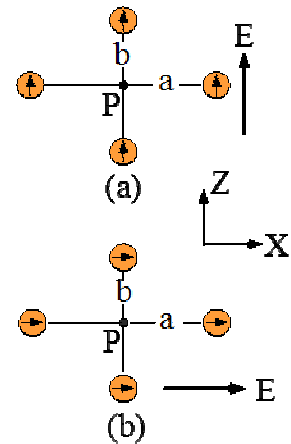


図5.1 原子分極がP点につくる電場は外部電場の向きによって異なる。

なぜ誘電率（屈折率）に異方性が起こるか、その理由を考えてみよう。きわめて単純化したモデルでこれを示そう。図 5.1 のように z 方向には b の間隔で、 x 方向には a の間隔で同一原子が並んでいるモデル格子を考え、さらに、中心原子 P を囲む 4 個の原子のみを考えます。誘電率(屈折率)の異方性は、それら 4 個の原子が中心原子に及ぼす電場が外部電場の方向によって異なること、すなわち、中心原子が感ずる局所場の大きさが、外部電場の方向によって異なることを示せばよい。

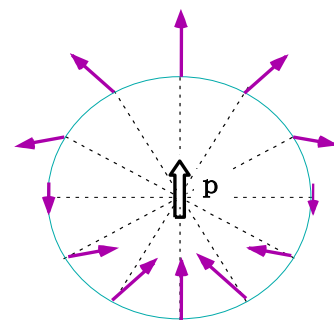


図 5.2 電気双極子モーメントが球面上に作る電場

光による電場 \mathbf{E} がかったとき、原子には電気双極子モ

ーメント \mathbf{p} が誘起されます (第 4 章図 4.1)。これらの電気双極子が中心原子 P につくる電場を求めてみよう。周りの原子の電気双極子モーメントによる電場と外部から印加した光による電場 \mathbf{E} によって P 原子に電気双極子モーメントが発生する。ここでは外部電場によって電気双極子が発生し、その双極子による局所場は二次の効果として原子分極にはたらくとします。すなわち、中心原子に働く、周りの 4 個の原子の電気双極子の大きさは外部電場 \mathbf{E} によって励起された電気双極子のみを考え、中心原子やその他の原子の電気双極子による電場は考えないことにします。これは外部電場に比べて原子分極によって発生する電場が小さいとする近似です。

電気双極子 \mathbf{p} が \mathbf{r} 離れた点に作る電場は前章(4.12)式で述べたように、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5} \quad (5.1)$$

である。電気双極子を含む面内で、双極子から半径 R の円上の点における電場をベクトルで表したのが図 5.2 である。双極子の延長線上にある上下の 2 点の電場の大きさは、(5.1) 式から $\frac{2p}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ 、双極子に垂直な、左右の 2 点では $\frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ となり、この 2 点からの電場は延長線上の電場の半分で向きは反対である。

図 5.1(a)の z 軸上にある 2 つの双極子が P 点に作る電場は z 方向で大きさ $\frac{2p}{4\pi\epsilon_0 b^3} \times 2$ 、 x 軸上にある 2 つの双極子が作る電場は z のマイナス方向で $\frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} \times 2$ となるので、4 個の双極子が中心原子に作用する電場は外部電場 \mathbf{E} と同じ方向で、

$$E_{z0} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{b^3} - \frac{2}{a^3} \right) \quad (5.2)$$

である。中心原子はこの電場と外部電場によって分極を起こす。

x 方向に外部電場をかけた場合 (図 5.1(b)) についても (a) と同様に計算すると、4 個の双極子から受ける電場はやはり外部電場と同じ方向で、

$$E_{x0} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{a^3} - \frac{2}{b^3} \right) \quad (5.3)$$

となる。

いま、 $b < a$ 、すなわち、 z 軸方向により密に原子が配列しているとする、

$$E_{z0} > E_{x0} \quad \text{ただし、} b < a \quad (5.4)$$

となる。外部から z 方向に電場をかけた場合の方が、 x 方向にかけた場合よりも、原子が感ずる局所場は大きくなり、誘起される原子電気双極子も大きくなる。結果としてこれらの原子分極の和である分極 \mathbf{P} も大きくなる。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_z &= \epsilon_0 \mathbf{E}_z + \mathbf{P}_z = \epsilon_z \mathbf{E}_z \\ \mathbf{D}_x &= \epsilon_0 \mathbf{E}_z + \mathbf{P}_x = \epsilon_x \mathbf{E}_x \end{aligned} \quad (5.5)$$

で定義される誘電率は、z 方向に電場が印加された場合の誘電率 $\epsilon_z (= n_z^2 \epsilon_0)$ が、x 方向に電場が印加された場合の誘電率 ϵ_x よりも大きくなり、結果として誘電率あるいは屈折率に異方性が生じるのです。

次に単斜晶系や三斜晶系の結晶に見られるような、原子が z 軸から γ だけずれている場合を考えてみよう(図 5.3)。図 5.1 のモデルと同様に中心原子 P の周りの 4 個の原子が P 点に作る電場を考える。z 方向に電場がかかった場合、z 軸から γ だけずれた上下の原子分極が P 点につくる電場は図 5.2 のほぼ同じ角度ずれた点の電場であるから、電場はほぼ両点を結ぶ方向にあって、z 方向からはずれている。すな

わち、外部電場が z 方向にかかったとき、原子分極によって発生する P 点における電場は x 成分を持っている。

一方、図 5.3 の a だけ離れてある原子分極がつくる電場は図 5.1 の場合と同じく、z のマイナス方向を向いている。このことから外部電場が z 方向にかかったとき、P 点にある原子が感ずる局所場は z 成分ばかりでなく、x 成分も持つ。それ故、その局所場によって誘起される原子分極も x 成分を持つのでそれらの和である電気分極 P も x 成分を持つことになり、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

で定義される電気変位 \mathbf{D} は外部電場 $\mathbf{E} = E_z$ に対して D_x を持つ。分極 \mathbf{P} は外部電場に比例するので、 D_x は E_z に比例する。比例定数を ϵ_{xz} 等と書けば、 $D_x = \epsilon_{xz} E_z$ となる。一般には、y 方向についても同じことが起こるので、

$$D_x = \epsilon_{xz} E_z, \quad D_y = \epsilon_{yz} E_z, \quad D_z = \epsilon_{zz} E_z \quad (5.6)$$

のようになる。

これまで格子を構成する粒子として方向性を持たない原子を考えてきたが、一般には、物質は異方性を持つ分子を基本粒子として構成されているので分極 \mathbf{P} も外部電場 \mathbf{E} の方向によって違った値と方向を持つ。一般に構成する粒子の並び方や粒子自身の異方性などに

より、 \mathbf{E} を任意の方向にとると、 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ に対して

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \quad (5.7)$$

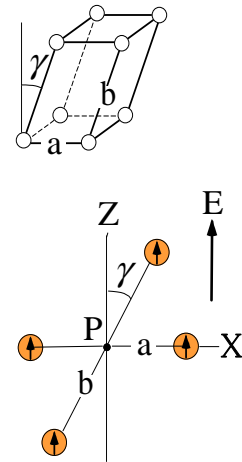


図 5.3 原子が z 軸からずれた点にある場合に原子分極が P 点につくる電場

のようになり、誘電率 $\boldsymbol{\epsilon}$ はテンソル量 $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ で、9 個の定数(実際には $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ の関係があるので最大でも 6 個である)で表される。しかし、結晶に対して適当な直交座標軸を選ぶ(このような座標軸を主軸という。この軸が結晶軸と異なることもあるので、これを区別するために電気的主軸、あるいは光学的主軸、単に光学軸ということもある)と、(5.7) 式で表される誘電率はいつでも 3 つの定数 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ で、

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_x E_x \\ D_y &= \epsilon_y E_y \\ D_z &= \epsilon_z E_z \end{aligned} \tag{5.8}$$

と表すことができる。電場 \mathbf{E} と電束密度 \mathbf{D} が同じ向きになるのは電場の向きが電気的主軸と平行のときだけである。この意味で、等方性媒質ではあらゆる方向が電気的主軸になりうる。

誘電率(透磁率もふくめて)は変動する電磁波に対するもので、第 4 章で述べたように、角振動数 ω の関数になっている。なお、ここでは強誘電体や強磁性体で現れる静的な電磁現象は考えていない(第 6 章参照)。

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ の値がすべて等しい結晶は等軸結晶とよばれ、立方対称性を持つ等方性結晶がこれにあたる。 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ のうち 2 つの値が等しい結晶は一軸性結晶、3 つとも異なる結晶は二軸性結晶という。全ての結晶は①等軸結晶(立方晶系)、②一軸性結晶(菱面体晶系, 正方晶系, 六方晶系, テンソル $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ の主軸は 3 回、4 回、6 回の対称回転軸と一致する。この軸を光学軸という。これに直交する 2 つの主軸は任意に取れる)、③二軸性結晶(三斜晶系、単斜晶系、斜方晶系)のどれかに分かれる。

5.2 異方性媒体中の平面電磁波

媒質の光学的性質は(5.7)式で表わされる誘電率 $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ と、磁場 \mathbf{H} と磁束密度 \mathbf{B} を結ぶ透磁率 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{B} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{H})$ で決まる。前に述べたように光の周波数領域では、透磁率は真空での値 μ_0 においてよいから、

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{5.9}$$

それゆえ、この条件下では光学的性質はもっぱら媒質の誘電率で決まる。ここではこのような非磁性体のみを扱うことにする。

可視光の振動数領域では光学材料は透明であるので誘電率テンソル $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ の各成分は実数である(光吸収は誘電率の虚数部で表わされる(付録 B、(B19~B21)式参照)。

透明媒体中を波数ベクトル \mathbf{k} 、振動数 ω で伝播する平面電磁波は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (5.10)$$

と書ける。透明媒質を考えているので波数ベクトル \mathbf{k} は実数で、 \mathbf{k} と屈折率 n との関係は

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = \frac{\omega}{c} (n_x, n_y, n_z), \quad n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (5.11)$$

ここでは屈折率もベクトルで表されている。その各方向の成分が n_x, n_y, n_z である。電磁波

の波面は $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t - \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} =$ 一定の条件のもとで移動するから、その移動速度 \mathbf{v}_p は

大きさ $\frac{c}{n}$ で、速度の向きは \mathbf{n} (すなわち \mathbf{k}) の向きと同じ向きである。

$$\mathbf{v}_p = \frac{c}{n} \frac{\mathbf{k}}{k} \quad |\mathbf{k}| = k \quad (5.12)$$

これが波の位相速度である。この速度は、波面が波面に垂直方向に移動する速さなので、波面法線速度ともいわれる。波のエネルギーが伝搬する速度は群速度といい、後述する。

このような平面電磁波では、(5.10)式から $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega \mathbf{E}$, $\nabla \times \mathbf{H} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{H}$ などと、時間に

関する偏微分は $i\omega$ 、位置に関する偏微分ナブラ ∇ は $-i\mathbf{k}$ で置き換えられる。 \mathbf{E}, \mathbf{B} 等が満足しなければならない、電磁波の基本方程式であるマックスウェル方程式 (付録 F 参照)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.13)$$

ただし、電流は流れていないので $\mathbf{J} = 0$ とおいた。この式に上で述べた微分操作を行うと、

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{H} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \quad (5.14)$$

が得られる。この(5.14)式から得られる重要な結論は、ベクトル積の性質により、 \mathbf{k} と \mathbf{H}, \mathbf{D} が直交し、かつ、第 2 式より \mathbf{H} と \mathbf{D} も直交するから、 $\mathbf{k}, \mathbf{H}, \mathbf{D}$ は互いに直交している。これを図示すると、図 5.4 のような配置になる。さらに、第 1 式より \mathbf{E} は \mathbf{H} と直交するから、 \mathbf{E} は \mathbf{k} と \mathbf{D} が作る平面内にある。波の進行方向 (\mathbf{k} 方向) に対して \mathbf{H} と \mathbf{D} は直交し、横波になっているが、 \mathbf{E} は直交せず、横波になっていない。等方媒質中では、波は横波で \mathbf{k} と \mathbf{E} は直交している

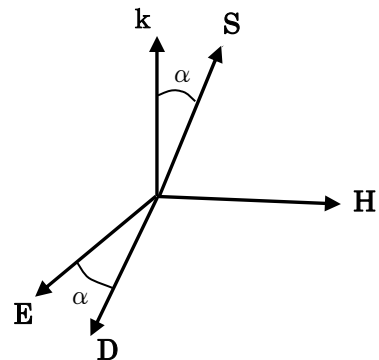


図 5.4 $\mathbf{S}, \mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{D}$ は同一平面上にあり、平面は \mathbf{H} に直交している

から $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ となり、さらに \mathbf{D} と \mathbf{E} は同じ向きになるが、異方性媒質中では一般に \mathbf{D} と \mathbf{E}

との向きは一致しない (図 5.4)。

エネルギーの流れであるポインテング・ベクトル \mathbf{S} は、実数表示で、

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5.15)$$

である。 \mathbf{S} は \mathbf{E} と \mathbf{H} の両方に直交しているから、エネルギーの流れる方向 \mathbf{S} は、 $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{D}$ と同一平面内にあり、かつ \mathbf{D} と \mathbf{E} とのなす角と、 \mathbf{k} と \mathbf{S} とのなす角は等しい。等方媒質中の電磁波とは異なり、位相の速度方向 (\mathbf{k} 方向) と波のエネルギー伝播方向 (\mathbf{S} 、これが測定にかかる量で、光線の進む方向である) が同一方向にないことに注意しよう。

(5.14)式から電場 \mathbf{E} を得るため、 \mathbf{H} を消去し、 \mathbf{E} だけの方程式にする。そのために、(5.14)式の第1式の両辺に左から \mathbf{k} をかけてベクトル積をとり、それに第2式を代入し、 $\mathbf{D} = \tilde{\epsilon}\mathbf{E}$ から

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \omega^2 \mu_0 \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (5.16)$$

第1項のベクトル積は付録 C(C8)式により、 $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E}$ であるから、電場 \mathbf{E} を求める方程式は

$$(\omega^2 \mu_0 \tilde{\epsilon} - k^2) \mathbf{E} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} = 0 \quad (5.17)$$

となる。ここでテンソル $\tilde{\epsilon}$ の対角要素だけが残る座標軸系 [これを主軸系という] を選ぶと、テンソル $\tilde{\epsilon}$ は(5.8)式に示したように

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

となる。便宜上、主軸の x, y, z 軸は $\epsilon_x \leq \epsilon_y \leq \epsilon_z$ になるように選ぶものとする。さらに、

誘電率を屈折率で表わすと、

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= n_{0x}^2 \epsilon_0 \\ \epsilon_y &= n_{0y}^2 \epsilon_0 \\ \epsilon_z &= n_{0z}^2 \epsilon_0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

この関係を形式的に $\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \tilde{n}^2$ と置くと、 $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ 、 $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$ であるから、(5.17)式の \mathbf{E}

の係数は

$$\omega^2 \mu_0 \tilde{\epsilon} - k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \tilde{n}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\tilde{n}^2 - n^2)$$

$$k_x k_y = \frac{\omega^2}{c^2} n_x n_y$$

等となり、(5.17)式は、

$$(\tilde{n}^2 - n^2)\mathbf{E} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} = 0 \quad (5.20)$$

これを行列の掛け算の形に書けば(以下の議論は付録 D “行列と行列式” を参照)

$$\begin{pmatrix} n_{0x}^2 - (n_y^2 + n_z^2) & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_{0y}^2 - (n_x^2 + n_z^2) & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_{0z}^2 - (n_x^2 + n_y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (5.21)$$

波の伝播方向が与えられると、すなわち、 \mathbf{n} の方向が与えられたとき、この方程式を解くことによって、その方向に伝搬する平面波の屈折率 n と \mathbf{E} が対として求まり、媒質中の電磁波が確定する。(5.21)式が有意の解、すなわち、0 以外の \mathbf{E} が存在するためには係数の行列式が 0 でなければならない。

$$\begin{vmatrix} n_{0x}^2 - (n_y^2 + n_z^2) & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_{0y}^2 - (n_x^2 + n_z^2) & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_{0z}^2 - (n_x^2 + n_y^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.22)$$

あるいはこれを展開して、

$$\begin{aligned} n^2(n_{0x}^2 n_x^2 + n_{0y}^2 n_y^2 + n_{0z}^2 n_z^2) - [n_{0x}^2(n_{0y}^2 + n_{0z}^2)n_x^2 + \\ n_{0y}^2(n_{0z}^2 + n_{0x}^2)n_y^2 + n_{0z}^2(n_{0x}^2 + n_{0y}^2)n_z^2] + n_{0x}^2 n_{0y}^2 n_{0z}^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

が条件となる。この式は結晶光学における基本となる式でフレネル方程式 (Fresnel's equation) と呼ばれている。なお、(5.22) 式の展開では n^6 の項があるように見えるが、展開してみれば明らかのようにこの項は打消しあってなくなる。

波のある決まった進行方向 (\mathbf{k} 、すなわち \mathbf{n} の方向) に対して、(5.23)式は n^2 の 2 次方程式になっているから、屈折率 n は一般に異なった 2 つの値がある(複屈折)。たとえば、 x y 方向に進む波では $n_z = 0$ と置くと、(5.23) 式

は

$$(n^2 - n_{0z}^2)(n_{0x}^2 n_x^2 + n_{0y}^2 n_y^2 - n_{0x}^2 n_{0y}^2) = 0 \quad (5.24)$$

即ち、

$$n^2 - n_{0z}^2 = 0 \quad (5.25)$$

$$\frac{n_x^2}{n_{0y}^2} + \frac{n_y^2}{n_{0x}^2} = 1 \quad (5.26)$$

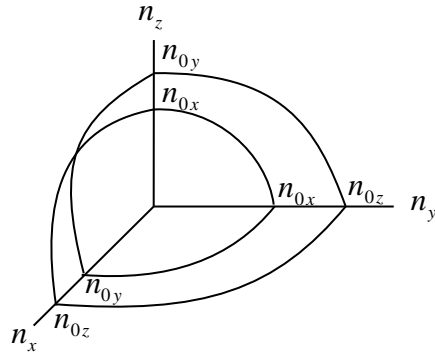


図 5.5 屈折率曲面

(5.25) 式より、 x y 方向に進む波の一つはその方向にかかわらず、屈折率が n_{0z} である。

この波は (5.21) 式から $E_x = E_y = 0$, $E_z \neq 0$ となり、 z 方向に直線偏光している。一方、

(5.26) 式で決まる屈折率を持つ波は (5.21) 式により偏光方向は x y 面内にあることがわかる。(5.26) 式で定まる屈折率は波の進行方向による。 x 方向に進行する波は、(5.26) 式

で $n_y = 0$ とおいて、 $n = n_{0y}$ であり、 y 方向に進行する波は同様にして n_{0x} の屈折率を持つ。

y 方向に進行する波の電場は x 方向に偏光しているから、この電場に対する誘電率 ϵ_x が働くため、屈折率は n_{0x} になると考えられる。 y z 、 z x 方向に進行する波も同様に (5.23)

式から計算し、それらをまとめて図示すると、屈折率曲面 (図 5.5) が得られる。ただし、

$n_{0x} < n_{0y} < n_{0z}$ としてある。波の進行方向 (\mathbf{n} の方向) が与えられると、原点からこの方向

に向かう直線が曲面と交わる点 (一般に 2 つの点) までの長さが屈折率の大きさである。

以上述べてきたように、ある進行方向に対して速さの異なる 2 つの波が存在する。それぞれの波に対して、(5.20) 式により得られる電場 \mathbf{E}_0 は実数になるから、波は固有の直線偏

光を持つことがわかる。等方媒質中では波は屈折率 n で決まる c/n の速さで、 \mathbf{k} に垂直な平

面内で任意の方向の直線偏光、あるいは任意の楕円偏光で伝搬することが出来た。これに

対して異方性媒質中では一つの伝搬方向に対して速さの異なる 2 つの、互いに直交する直線偏光が伝搬する [複屈折]。楕円偏光、円偏光は存在せず、互いに直交する 2 つの直線偏光のみが伝搬できるのである。

一部繰り返しになるが、上述したことを具体的に数式で当たってみよう。(5.14) 式第 2 式

の \mathbf{H} に第 1 式の \mathbf{H} を代入して \mathbf{H} を消去すると、 $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$, $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ から

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{\omega^2 \mu_0} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\omega^2 \mu_0} (k^2 \mathbf{E} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k}) = \epsilon_0 (n^2 \mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{n}) \quad (5.27)$$

(5.23) 式により、波の進行方向が与えられると屈折率 n について一般に 2 つの値、 n_1, n_2 が得られる。いまは座標軸を主軸にとってあるから $D_i = \epsilon_i E_i$, ($i = x, y, z$) である。得られた n

に対して、(5.27) 式から、対応する電場 \mathbf{E} の x 成分 E_x は

$$D_x = \epsilon_x E_x = \epsilon_0 (n^2 E_x - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) n_x)$$

となる。これより E_x を求めると、 $\epsilon_x = \epsilon_0 n_{0x}^2$ より、

$$E_x = \frac{n_x}{n^2 - n_{0x}^2} \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})}{\epsilon_0}$$

同様にして E_y, E_z を求めると、

$$E_y = \frac{n_y}{n^2 - n_{0y}^2} \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})}{\epsilon_0}$$

$$E_z = \frac{n_z}{n^2 - n_{0z}^2} \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})}{\epsilon_0}$$

が得られる。電場ベクトルの向き(偏光方向)に興味があるのであるから共通の $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})/\epsilon_0$ を除くと、各 $n = n_1, n_2$ について

$$E_x = \frac{n_x}{n^2 - n_{0x}^2}$$

$$E_y = \frac{n_y}{n^2 - n_{0y}^2} \tag{5.28}$$

$$E_z = \frac{n_z}{n^2 - n_{0z}^2}$$

が得られる。対応する電束密度 \mathbf{D} は $\mathbf{D} = \tilde{\epsilon}\mathbf{E}$ から直ちに得られる。このように、ある方向に伝播する電磁波は異なる屈折率、すなわち、異なる位相速度と異なる偏光を持つ 2 つの波として伝播する。また、 \mathbf{D} は \mathbf{k} 、すなわち \mathbf{n} と直交しているから $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$ である (図 5.4)。

$D_x = \epsilon_0 n_{0x}^2 E_x$ などより (5.28) 式から

$$\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{n_{0x}^2 n_x^2}{n^2 - n_{0x}^2} + \frac{n_{0y}^2 n_y^2}{n^2 - n_{0y}^2} + \frac{n_{0z}^2 n_z^2}{n^2 - n_{0z}^2} = 0 \tag{5.29}$$

当然ながら、この式は通分して整理すると明らかなように(5.23)式と同じものである。さらに $n_{0x}^2 = n^2 - (n^2 - n_{0x}^2)$ と変形すると、

$$\frac{n_{0x}^2 n_x^2}{n^2 - n_{0x}^2} = \frac{n^2 n_x^2}{n^2 - n_{0x}^2} - n_x^2$$

y, z 成分についても同様に変形し、 $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2$ であるから、(5.29)式は

$$\frac{n_x^2}{n^2 - n_{0x}^2} + \frac{n_y^2}{n^2 - n_{0y}^2} + \frac{n_z^2}{n^2 - n_{0z}^2} = 1 \tag{5.30}$$

と書くこともできる。

(5.22), (5.23), (5.29), (5.30) 式はすべて同じ式で、波の伝播方向を与えたときに屈折率を求める式になっている。ただし、波の伝播方向が主軸と平行のときは、分母がゼロになるので(5.29)、(5.30)式は使えない。そのときは(5.23)式に戻って n を求める。たとえば、z 方向

に伝播する波は、(5.23)式で $n_x = n_y = 0$, $n_z = n$ とおくと、

$$n^4 n_{0z}^2 - n^2 n_{0z}^2 (n_{0x}^2 + n_{0y}^2) + n_{0x}^2 n_{0y}^2 n_{0z}^2 = n_{0z}^2 (n^2 - n_{0x}^2)(n^2 - n_{0y}^2) = 0$$

となり、z 方向に進む波は屈折率が n_{0x}, n_{0y} である(この結果は図 5.5 で述べた)。偏光についてはすでに述べたので繰り返しになるが(46P も参照)、(5.20)式、または(5.21)式に $n = n_{0x}$, $\mathbf{n} = (0, 0, n_{0x})$ を代入すると $E_y = E_z = 0$ がえられ、屈折率 n_{0x} で z 方向に進む波は x 方向に偏光していることが分かる。屈折率 n_{0y} をとる波は y 方向に偏光していることも同様にして得られる。このようにして z 方向に進む波は異なる 2 つの伝播速度を持ち、 c/n_{0x} の伝播速度の波は x 方向に偏光し、 c/n_{0y} の波は y 方向に偏光している。これ以外の偏光はない。たとえば、z 方向に進む波の電場が x 軸に対して θ の角度の直線偏光は、電場が x 方向に振動する成分 $E \cos \theta$ と y 方向に振動する成分 $E \sin \theta$ の 2 つの波に分かれ、それぞれの波は c/n_{0x} 、 c/n_{0y} の異なる位相速度で伝播することになる。

5.3 屈折率楕円体

異方性媒体中を伝播する平面電磁波の振る舞いを最も簡明に表わす方法として、誘電率楕円体(あるいは屈折率楕円体)が用いられる。ここでそれを説明する。

波の伝播方向 \mathbf{k} に直交するのは電束密度 \mathbf{D} で、位相速度に対して \mathbf{D} は横波を形成しているので \mathbf{D} を考えると便利である。 $\mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \mathbf{E}$ を逆変換して $\mathbf{E} = \tilde{\epsilon}^{-1} \mathbf{D}$ とする。これを(5.27)式に代入すると、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \left[n^2 \tilde{\epsilon}^{-1} \mathbf{D} - (\mathbf{n} \cdot \tilde{\epsilon}^{-1} \mathbf{D}) \mathbf{n} \right] \quad (5.31)$$

ここで電磁波は屈折率 n で、 \mathbf{n} 方向に伝播し、その電束密度は \mathbf{D} である。(5.31)式の両辺と \mathbf{D} のスカラー積をとると、 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0$ だから、右辺第 2 項は消えて

$$\frac{1}{n^2} \mathbf{D}^2 = \epsilon_0 \mathbf{D} \cdot \tilde{\epsilon}^{-1} \mathbf{D} \quad (5.32)$$

主軸を座標軸系に取れば、

$$\tilde{\epsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_z} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

である。(5.33)式を(5.32)式に代入して、具体的に書けば、

$$\frac{D_x^2}{\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z} = \frac{D^2}{\epsilon_0 n^2} \quad (5.34)$$

あるいは $\epsilon_i = \epsilon_0 n_{0i}^2$ ($i = x, y, z$) の関係を使えば、

$$\frac{D_x^2}{n_{0x}^2} + \frac{D_y^2}{n_{0y}^2} + \frac{D_z^2}{n_{0z}^2} = \frac{D^2}{n^2} \quad (5.35)$$

ここで \mathbf{D} の大きさを屈折率の絶対値 n にとり、 \mathbf{D} を位置ベクトル \mathbf{r} と書けば、 $|\mathbf{r}| = n$ で、

$$\frac{x^2}{n_{0x}^2} + \frac{y^2}{n_{0y}^2} + \frac{z^2}{n_{0z}^2} = 1 \quad (5.36)$$

この方程式は楕円面を表わしている。この式で表わされる楕円体を **屈折率楕円体** という。

また、(5.34)式で $D^2 = \epsilon_0 n^2$ と置いて、同じく \mathbf{D} を位置ベクトル \mathbf{r} で書いた、

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1 \quad (5.37)$$

は誘電率で表わしたもので、これを **誘電率楕円体** という。

(5.36)式の導き方から分かるように、原点から楕円面上の点に引いたベクトルは電束密度 \mathbf{D} の向きを表わし、ベクトルの大きさは、その偏光に対応する屈折率になっている。たとえば、 \mathbf{D} が x 方向を向いているとき、(5.36)式で $y = z = 0$ とおいて $x = n_{0x}$ がえられるが、これは $\mathbf{D} // x$ 偏光の波は屈折率 n_{0x} で伝播することを表わしている。

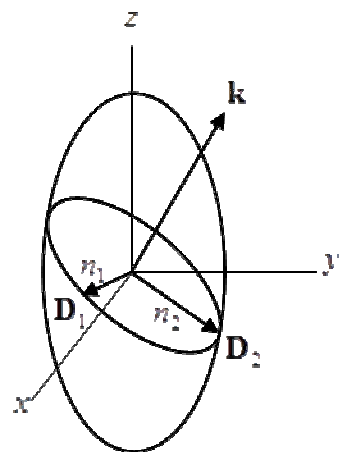


図5.6 屈折率楕円体

電磁波が任意の方向 (\mathbf{k}) に進行している場合はどうなるであろうか。 \mathbf{k} を向いた方向を z' 軸にとると、 \mathbf{k} と \mathbf{D} は直交するから \mathbf{D} は z' 方向の成分は持たず、それに直交する x', y' 成分のみとなる。このような座標系 (x', y', z' 座標系)

では \mathbf{D} は $D_{x'}, D_{y'}$ 成分のみであるから、(5.31)式の左辺の第2項は寄与せず、

$$\begin{pmatrix} D_{x'} \\ D_{y'} \end{pmatrix} = \varepsilon_0 n^2 \begin{pmatrix} \varepsilon_{x'x'}^{-1} & \varepsilon_{x'y'}^{-1} \\ \varepsilon_{y'x'}^{-1} & \varepsilon_{y'y'}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{x'} \\ D_{y'} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

が得られる。 $\tilde{\varepsilon}$ が対称行列 ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) なので、その逆行列も対称行列 ($\varepsilon_{ij}^{-1} = \varepsilon_{ji}^{-1}$) となるから、 x', y' 軸を適当に選ぶと、(5.38)式は

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 n^2 \begin{pmatrix} \varepsilon_{x'}^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{y'}^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{D} \quad (5.39)$$

すなわち、

$$\frac{D_{x'}^2}{n_{0x'}^2} + \frac{D_{y'}^2}{n_{0y'}^2} = \frac{D^2}{n^2} \quad (5.40)$$

ただし、 $\varepsilon_{x'}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_0 n_{0x'}^2}$ 等とおいた。(5.40)式は、 \mathbf{k} に垂直でかつ原点を通る平面で屈折率楕

円体を切った切り口を表わしている。その切り口は楕円になり、その半長径と半短径の長さは屈折率を表わし、長軸、短軸の向きは偏光方向を表わしている。すなわち、 \mathbf{k} 方向に伝播する波の偏光 ($\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$) 方向と屈折率 n_1, n_2 を表わしていることが分かる(図 5.6)。

5.4 位相速度と群速度

平面電磁波の波面の移動速度は屈折率 n が与えられれば、 c/n で、これが波の位相速度である。この速度は、波面が波面に垂直方向に移動する速さなので、波面法線速度とも言われることはすでに述べた。しかし、この波面の移動を観測することはできない。光の電磁場の時間変化は非常に速いのでその変化を測定することはできないからである。光学測定で観測されるのは光のエネルギーの流れである。このエネルギーの流れはポインティング・ベクトルで表わされる ((5.15)式参照)。観測されるのは波束(エネルギー)の移動速度、すなわち、群速度 \mathbf{v}_g であり、これは角振動数 ω を波数ベクトル \mathbf{k} で微分した量で、

$$\mathbf{v}_g = \text{grad}_{\mathbf{k}} \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right) \quad (5.41)$$

で定義される量である。媒質には分散があるから(第4章屈折率参照)、屈折率は振動数の関

数である ($n = n(\omega)$) #)。 $\frac{c}{n(\omega)} = \frac{\omega}{k}$ から ω は k の関数とみなすこともできる。

以下で群速度とポインティング・ベクトルは同じ向きであること、また、 \mathbf{k} (または \mathbf{n}) が与えられたとき、その位相速度に対応する群速度は屈折率曲面に接する接平面に垂直方向であることを示そう。

(5.14)式の第1式 $\omega\mu_0\mathbf{H} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ と \mathbf{H} のスカラー積をとると、

$$\omega = \frac{1}{\mu_0 H^2} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 H^2} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{\mu_0 H^2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{S} \quad (5.42)$$

右辺最後の式はポインティング・ベクトルの定義である(5.15)式による。観測される群速度は短い時間での時間平均であるから、平面電磁波の H^2, \mathbf{S} の時間平均は ω, \mathbf{k} によらない。

#) 一般には屈折率は波数ベクトルの関数 $n = n(\mathbf{k}, \omega)$ でもあるが、本書では均一媒質でかつ分子の大きさ、あるいは格子間隔よりも十分長い波長を仮定しているので、 \mathbf{k} 依存性は無視してよい。

これより

$$\mathbf{v}_g = \text{grad}_{\mathbf{k}} \omega = \frac{1}{\mu_0 H^2} \mathbf{S} \quad (5.43)$$

が得られる。群速度とエネルギーの流れであるポインティング・ベクトルは同じ向きであることが示された。電磁場のエネルギー密度 u は $\mu_0 H^2$ であるから、ポインティング・ベクトルと群速度は、(5.47) 式より

$$\mathbf{S} = u \mathbf{v}_g \quad (5.44)$$

の関係にある。この式はエネルギーが \mathbf{v}_g の速さで流れるので、単位時間、単位面積を流れるエネルギーがポインティング・ベクトルであることを再確認していることになっている。

次に、 \mathbf{k} (または \mathbf{n}) が与えられたとき、その位相速度に対応する群速度は屈折率曲面(図 5.5)に接する平面に垂直であることを示す。群速度の定義(5.41)式により群速度の x, y, z 成分

は $\frac{\partial \omega}{\partial k_i}$, ($i = x, y, z$) である。一方屈折率曲面(5.30)式を $\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}$ の関係を使って波数ベク

トル \mathbf{k} で表わすと、屈折率曲面 $f(\omega, \mathbf{k}) = 1$ は、

$$f(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_x^2}{k^2 - k_{0x}^2} + \frac{k_y^2}{k^2 - k_{0y}^2} + \frac{k_z^2}{k^2 - k_{0z}^2} = 1, \quad k_{0i} = \frac{\omega}{c} n_{0i} \quad (5.45)$$

f が ω の関数にもなっているのは誘電率、すなわち、 k_{0i}^2 が振動数に依存していることによる。屈折率曲面上の点 (ω, \mathbf{k}) について、

$$\delta f = f(\omega + \delta\omega, \mathbf{k} + \delta\mathbf{k}) - f(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\partial f}{\partial \omega} \delta\omega + \sum_i \frac{\partial f}{\partial k_i} \delta k_i = 0$$

これより、

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_i} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial k_i}}{\frac{\partial f}{\partial \omega}}$$

いまは、与えられた ω について考えているので、 $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ は定数と考えてよいから、

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_i} \propto - \frac{\partial f}{\partial k_i} \quad \therefore v_g = \text{grad}_{\mathbf{k}} \omega \propto \text{grad}_{\mathbf{k}} f \quad (5.46)$$

与えられた ω に対して屈折率曲面上の点 \mathbf{k} (あるいは \mathbf{n}) $\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}$ について

$$f(\omega, \mathbf{k} + \delta\mathbf{k}) - f(\omega, \mathbf{k}) = \text{grad}_{\mathbf{k}} f \cdot \delta\mathbf{k} = 0$$

これは $\text{grad}_{\mathbf{k}} f$ 、すなわち、 \mathbf{v}_g が屈折率曲面上に点 \mathbf{k} で接する平面に垂直であることを示している。

$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$ であるから、同じことは屈折率 \mathbf{n} についてもいえる。群速度 \mathbf{v}_g は屈折率曲面上で点 \mathbf{n} で接する平面に垂直である。図 5.7 に示すように、光の伝播方向が与えられる(図で \mathbf{k} の方向)とそれによって 2 個の屈折率があり、それに対応して 2 つの群速度がある。すなわち、一つの位相の伝播方向 (\mathbf{k} または \mathbf{n}) に対して 2 つの光線があることになる。

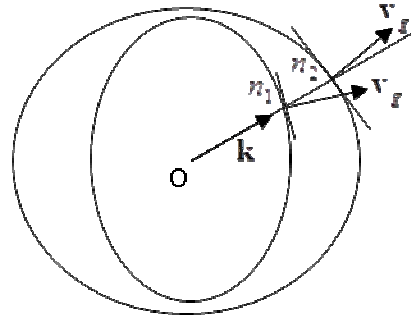


図5.7 屈折率曲面と群速度

5.5 一軸性結晶の光学的性質

結晶の光学的性質はすでに述べたように誘電率テンソル $\tilde{\epsilon}$ によって決まる。立方対称性を持つ結晶では誘電率テンソル $\tilde{\epsilon}$ は対角元素のみで、かつ各元素は等しい ($\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$)。

このとき、主軸は任意の方向に取ることができ、その光学的性質は等方媒質とまったく同じである。

一軸性結晶は三方晶系、六方晶系、正方晶系に属する結晶で、 $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ である。光学素子として利用される結晶は主に一軸性結晶である。その代表的な結晶とその屈折率を表 5.1 に示す。

表 5.1 一軸性結晶の屈折率(589.29nm)

	n_o	n_e
正結晶：水晶(Quartz)	1.544	1.553
ルチル(Rutile)	2.616	2.903
負結晶：方解石(Calcite)	1.658	1.486
KDP(KH ₂ PO ₄)	1.507	1.467

結晶対称の 3 回、4 回、6 回の回転軸が ϵ_3 の値をとる 3 軸(これを光学軸という)になる。ここでは光学軸を z 軸にとることにする。光学軸に直交する 2 つの主軸、x, y 軸は一軸性

結晶では z 軸に直交する平面内で任意に取ることができる。各軸に対応する誘電率を

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp} = \varepsilon_0 n_o^2 \quad (5.47)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_0 n_e^2 \quad (5.48)$$

とおく。誘電率につけた下付き添え字は、後で説明するように、 \perp (\parallel) は偏光 (すなわち、電場 \mathbf{E}) の向きが光学軸と直交 (平行) な電磁波に対応していることを表わしている。また、屈折率の添え字は以下に示す

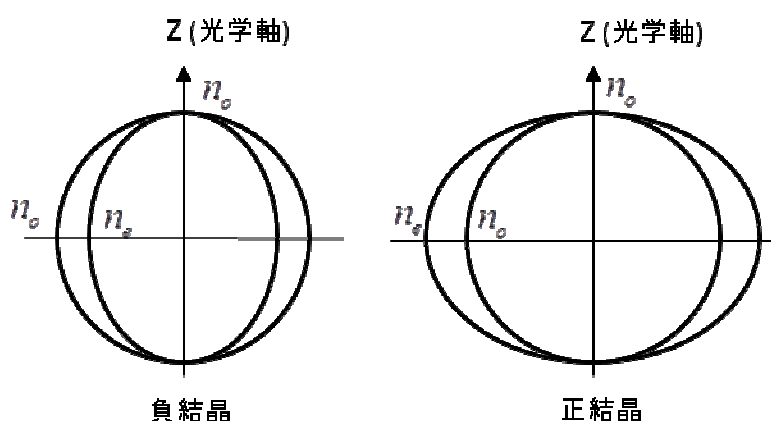


図5.8 一軸性結晶の屈折率曲面

ように n_o は常光線 (ordinary ray)、 n_e は異常光線 (extraordinary ray) の頭文字をとっている。 n_o, n_e の大小関係によって、 $n_o < n_e$ の結晶を正結晶、逆の $n_o > n_e$ の結晶を負結晶という (図 5.8)。図では原点から各曲面上の点にひいたベクトルの向きは光の伝播方向、すなわち、波面の伝播方向であり、エネルギーが伝搬する光線方向ではないことに注意しなければならない。ベクトルの大きさがその方向に伝搬する波の屈折率である。一軸性結晶では光学軸に沿って進む波は屈折率 n_o の常光線で、この方向に進む波は屈折率が同じで 2 重に縮退している。光学軸 (z 軸) から傾いた方向に進む波は異なる屈折率の 2 つの波になる。その一つは常光線で、屈折率は n_o であり、電場の偏光は、(5.21)式から Z 軸と屈折率ベクトル \mathbf{n} とで作る平面に垂直であることがわかる。他の波は伝搬方向、すなわち、 \mathbf{n} の方向によって屈折率が変わる。電場の偏光方向は、(5.21)式から光学軸 (Z 軸) とベクトル \mathbf{n} が作る面内にあることがわかる。以上述べたことは光の伝播方向 (\mathbf{n} あるいは波数ベクトル \mathbf{k} の方向) が与えられた時の波面の移動に関することであつた。我々が観測できるのは波のエネルギーの伝播である。等方性媒質では光の伝播方向、すなわち、波面の伝播方向と波のエネルギーが伝播方向は一致している。しかし、一軸、あるいは二軸性結晶では、すでに述べたように、光の一つの伝播方向 (\mathbf{n} の方向) に対して、一般には 2 つの光線 (異なる群速度 \mathbf{v}_g) があり、その伝搬方向は異なった方向を向いている。このことを一軸性結晶で考えてみよう。

一軸性結晶における光波の伝播方程式 (フレネルの方程式) は、波の伝播方向 $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$ に対して、(5.47)、(5.48)式を(5.23)式に代入すると、

$$(n^2 - n_o^2) [n_o^2 (n_x^2 + n_y^2) + n_e^2 n_z^2 - n_o^2 n_e^2] = 0 \quad (5.49)$$

となる。これを書き換えれば、

$$n^2 - n_o^2 = 0 \quad (5.50)$$

$$\frac{n_x^2 + n_y^2}{n_e^2} + \frac{n_z^2}{n_o^2} = 1 \quad (5.51)$$

一軸性結晶では屈折率曲面(図 5.8)は $z = \pm n_o$ で接する 2 つの曲面に分離される。ひとつは (5.50)式で表わされる半径 n_o の球面である。この球面で表わされる波は、屈折率曲面が球であることから、等方媒質を伝播する波とまったく同じように振舞い、反射・屈折もスネルの法則 (Snell's law) に従う。このことからこの波を **常光線** という。この波の偏光方向は(5.27)式で x 成分をとり、それに $D_x = \epsilon_x E_x = n_o^2 \epsilon_0 E_x$, $n = n_o$ を代入すると、 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$ が得られ

るから、偏光 (\mathbf{E}) は \mathbf{n} に直交する平面内にあることが分かる。さらに $D_z = n_e^2 \epsilon_0 E_z$, $n = n_o$

を代入すると $(n_e^2 - n_o^2)E_z = 0$ が得られるから $E_z = 0$ である。このことから、常光線の偏光方向は光学軸 (z 軸) と伝播方向 (すなわち \mathbf{n} 方向) が作る面(この面を **主断面** と言う)に垂直であることが分かる。これは (5.21) 式から得られる結論と当然であるが一致する。

屈折率曲面が(5.51)式で表わされる波は光の伝播方向 (\mathbf{n} 方向) によって屈折率が変わる波で、この波を **異常光線** という。光学軸(z 軸)と光の伝播方向 (\mathbf{n}) とのなす角を θ とおくと、 $n_x^2 + n_y^2 = n^2 \sin^2 \theta$, $n_z^2 = n^2 \cos^2 \theta$ とおけるから、

$$\frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} = \frac{1}{n^2} \quad (5.52)$$

x, y 軸は任意に取れるから、 \mathbf{n} は y z 面にあるとしよう。このように座標軸をとると、常光線の偏光方向は x 軸方向になる。異常光線の電束密度 \mathbf{D} の偏光は、常光線の偏光 (電束密度 \mathbf{D} と電場 \mathbf{E} は平行であることに注意) と直交しているから、y z 面内にあることが分かる。

異常光線の電束密度の偏光方向は \mathbf{n} に垂直である ($\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0$) から、

$$D_y n_y + D_z n_z = 0 \quad \frac{n_y}{n_z} = \tan \theta = -\frac{D_z}{D_y} \quad (5.53)$$

一方、(5.47)、(5.48)式より

$$E_y = \frac{D_y}{\epsilon_{\perp}}, \quad E_z = \frac{D_z}{\epsilon_{\parallel}}$$

又、異常光線の磁場 \mathbf{H} は、図 5.4 より \mathbf{k} (あるいは \mathbf{n}) と \mathbf{D} に垂直なので、x 軸方向を向いている。これよりエネルギーの流れる方向、すなわち、ポインティング・ベクトル \mathbf{S} は

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \left(0, \frac{D_z H}{\epsilon_{//}}, -\frac{D_y H}{\epsilon_{\perp}} \right)$$

ポインティング・ベクトルが光線の進む方向である。上式で得たように、光線もまた、yz 面内にあるから、光線の進む方向が z 軸となす角を θ' とすると、

$$\tan \theta' = \frac{S_y}{S_z} = -\frac{D_z}{D_y} \cdot \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{//}} \quad (5.54)$$

(5.53)式と(5.54)式より波の伝播方向、すなわち位相速度の方向と光線の進む方向との間には

$$\tan \theta' = \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{//}} \tan \theta = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta \quad (5.55)$$

の関係がある(図 5.9)。異常光線の光線伝播方向と位相速度方向とが一致するのは光線が光学軸方向($\theta' = 0$)か、あるいは光学軸に垂直 ($\theta' = \pi/2$)に伝播する場合のみである。

このように位相速度の伝搬は境界面での光の屈折に基本的役割をなすが、測定にかかる光線とは異なるので注意が必要である。

得られた結果を使って、光が空中から一軸性結晶に入射したときの屈折光の振舞を考えてみよう。簡単な例として結晶表面は光学軸に垂直であるとする(任意に傾いた場合については第 6 章 1 節で述べる)。入射光のうち S 偏光の光は偏光が光学軸と直交しているので結晶の中では常光線として振舞う。それ故、S 偏光成分の光については屈折の法則が成り立ち、屈折率 n_o の等方性媒質と全く同じ屈折光となる。一方、P 偏光成分の光は結晶中では異常光線になる。この屈折光も入射面内にあるから、光学軸を z 軸にとり、入射面を x z 面にとると、入射波の \mathbf{n} の x 成分は、空中では $n = 1$ だから、

$$n_x = \sin \alpha \quad (5.56)$$

となる。 α は入射角である。 n_x は境界面の上下で同じ値をとるから、屈折光の \mathbf{n} の x 成分も (5.56) 式である。屈折光の n_z は (5.51) 式から

$$n_z = \frac{n_o}{n_e} \sqrt{n_e^2 - \sin^2 \alpha} \quad (5.57)$$

これから位相速度の伝播方向 (\mathbf{k} 方向) の角 θ は

$$\tan \theta = \frac{n_x}{n_z} = \frac{n_e}{n_o} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n_e^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (5.58)$$

となり、光線の伝播方向 θ' は (5.55) 式から

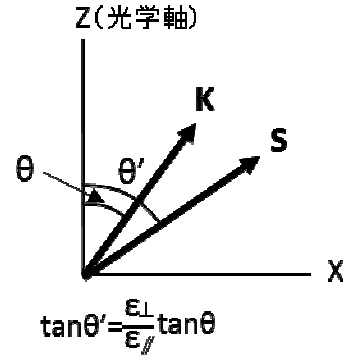


図5.9 位相速度方向 \mathbf{k} と光線の進む方向 \mathbf{s}

$$\tan \theta' = \frac{n_o}{n_e} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n_e^2 - \sin^2 \alpha}}$$

(5.59)

となる。結晶が平行平板である場合、裏面から空中へ出る光は入射光と等しい角度で空中に出射するので出射角は常光線、異常光線とも α であるが 2 つの光線は分離して出射する (図 5.10)。

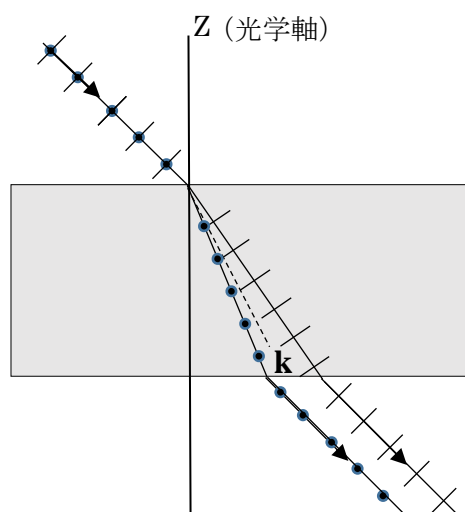


図 5.10 負結晶における光の屈折。常光線 (S 偏光、黒丸) と異常光線 (P 偏光、斜線) の分離