

第2回

3. 偏光の数学表示	14
3.1 光波を数式で表す	14
3.2 偏光状態	16
3.2.1 直線偏光	17
3.2.2 円偏光	18
3.2.3 楕円偏光	19
3.3 偏光の測定と表示	25
3.3.1 偏光とストークス・パラメータ	25
3.3.2 ポアンカレ球とストークス・パラメータ	30
3.3.3 偏光とジョーンズ・ベクトル	31
付録	
A. 三角関数	36
B. 電磁波の複素数表示	40
C. ベクトル	45
D. 行列と行列式	47

3. 偏光の数学表示

3.1 光波を数式で表す

媒質中を伝わる光波を数式で表す方法は電磁気学の書物にいろいろと説明されているので、ここでは偏光を記述するのに必要な範囲でまとめておきます。光は電磁波であり、電場、磁場が振動しながら伝わる波です。光が物質に作用するのは主に光の電場であるから、ここでは光の電場成分だけを扱うことにする。すなわち、光の電場の波動性を取り扱う。磁場の表示についても場の方向が電場と直角であることを除けば全く同じように記述される。

単色の光波は波の進行方向(ここでは z 方向とする)に垂直な電場の変位によって伝搬し、変位の大きさは時刻 t と進行方向の位置 z に対して余弦関数(あるいは正弦関数)的に変わる。その様子を図 3.1 に示す。この様な電場がそのままの形で z 方向に平行移動していくのが単色の波で、同じ位置の所(z が一定)では電場は xy 平面内のどの位置でも同じ値をとるので、この様な波を平面波という。電場ベクトル \mathbf{E} の大きさは

$$E(z, t) = a \cos(\omega t - kz + \delta) \quad (3.1)$$

と表せる(三角関数については付録A参照)。ここで、 a 、 ω 、 k 、 δ は全て定数で、 a は振幅、余弦関数の引数 $(\omega t - kz + \delta)$ は位相である。 k は波数と呼ばれ、波長 λ と次の関係がある。

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.2)$$

ω は角周波数で、周波数 f 、波の周期 T とは次の関係がある。

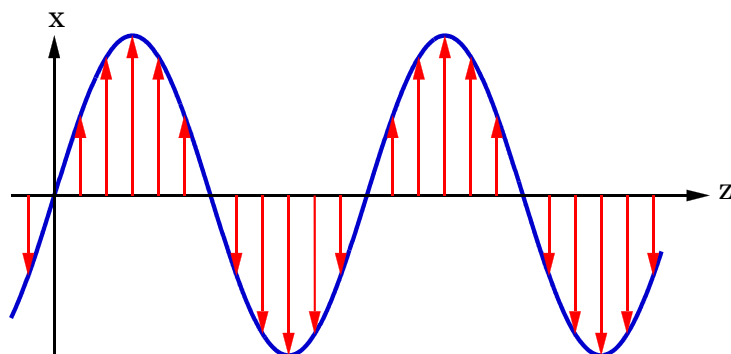


図 3.1 電場ベクトルの伝搬

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \dots\dots\dots (3.3)$$

δ は基準の時間、空間の点($t = 0, z = 0$)での位相を表し、初期位相と呼ばれる。なお、光の強度は振幅の自乗に比例する。実際の光、例えば、黄色の光の波長は約 500nm 、すなわち、 $500 \times 10^{-9}\text{m}$ である。光は真空中で 1 秒間に約 $3 \times 10^8\text{m}$ 進むので、黄色の光の振動数は約 $6 \times 10^{14}\text{Hz}$ である。

(3.1)式に戻ろう。この式は時刻 t 、位置 z と共に電場が振動しながら伝搬する様子を数学的に表したものである。ある時刻 t のとき、ある位置 z で波が最大値 a をとったとする。僅かな時刻 Δt が経過したとき、最大値の位置が Δz だけ移動したとすると、最大値を取る位相は同じだから

$$\omega t - kz + \delta = \omega(t + \Delta t) - k(z + \Delta z) + \delta$$

となり、 $\omega\Delta t - k\Delta z = 0$ の関係が成り立つ。すなわち、

$$\Delta z = \frac{\omega}{k} \Delta t$$

となる。時間が経過するとき Δt は正であるから、 Δz も正である。従って、波は時間の経過

と共に正の方向に動き、最大値の位置の移動する速さは

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \lambda f \dots\dots\dots (3.4)$$

となる。波は形を保ったまま移動するから、(3.4)式が波の移動速度(これを位相速度という)である。

以上の議論から明らかなように、

$$E(z, t) = a \cos(kz - \omega t + \delta) \dots\dots\dots (3.5)$$

と表される波も正の方向へ同じ速度で進む進行波を表していることが分かる。波の表現として(3.1)式、あるいは(3.5)式のどちらを使っても良い[#]。ここでは ωt の係数を正の符号に

とる(3.1)式を用いることにする。

同様に、例えば、

$$E(z,t) = a \cos(\omega t + kz + \delta) \dots\dots\dots (3.6)$$

で表される波は、時間の経過と共に z の負の方向に進む波であることが分かる。

*)あとで示すように、(3.1)と(3.5)式の表現の違いは円偏光などの表示に決定的な違いを生じることになる。(付録 G 参照)

3.2 偏光状態

ある瞬間における単色光の電場を図示したのが図 3.2 である。光線の中心線を基点として各々の位置での電場ベクトルを描き、そのベクトルの先端をつなぎ合わせてできた曲線が描いてある。電場がある特定の方向でのみ振動する光を直線偏光(図 3.2a)、電場ベクトルが螺旋になって伝搬する円偏光(図 3.2b,c)、図には示されていないが、電場ベクトルの先端の軌跡を xy 平面上に投影したとき楕円になる楕円偏光がある。

光は横波であるので、進行方向に垂直な方向で電場は振動する。その電場ベクトルは xy 平面内にあるので、振動を互いに独立な x 成分と y 成分に分解できる。その電場成分を E_x 、 E_y とすると、振幅 a_x 、 a_y は正にとることにして、

$$E_x = a_x \cos(\omega t - kz + \delta_x) \dots\dots\dots (3.7a)$$

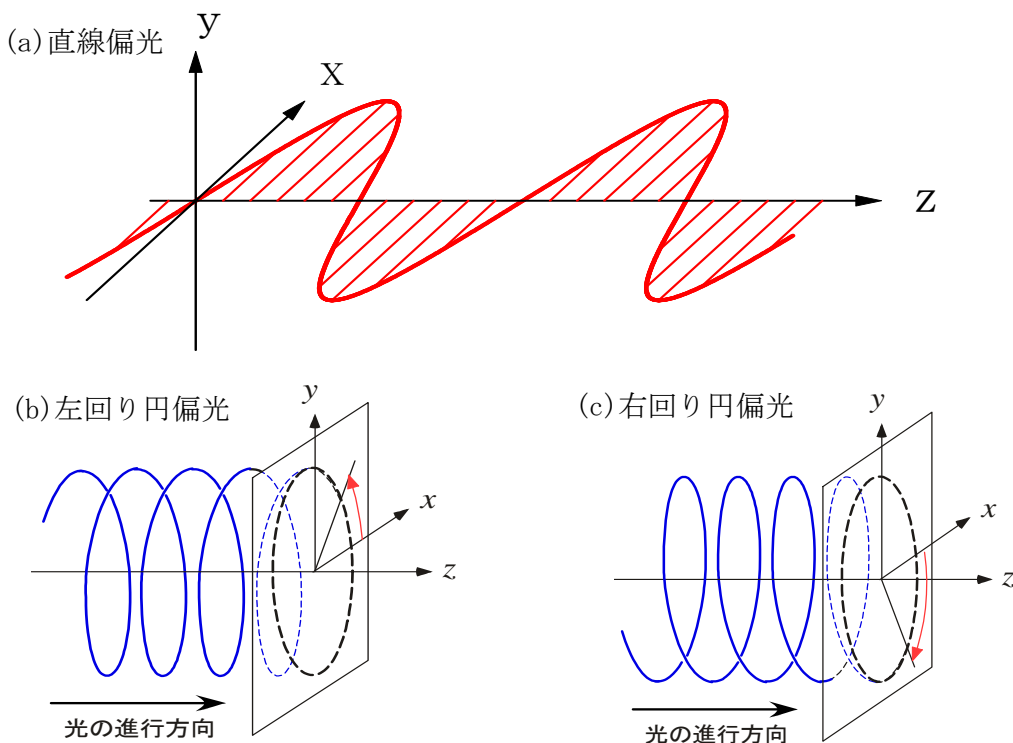


図 3.2 z 方向に伝搬する偏光波。偏光の回転の向きは光源に向かった観測者から見た方向をとる。

$$E_y = a_y \cos(\omega t - kz + \delta_y) = a_y \cos(\omega t - kz + \delta_x + \delta_y - \delta_x) \dots\dots\dots(3.7b)$$

となる。横波なので z 方向の電場 E_z は 0 である。なお、z 軸の原点、あるいは時間の原点

を適当にとればいつでも $\delta_x = 0$ にすることができる。ここでは電場の E_x の初期位相を基準にとることにし、位相差 $\delta_y - \delta_x = \delta$ とおくと、一般に z 方向に進む電磁波は

$$E_x = a_x \cos(\omega t - kz) \dots\dots\dots(3.8a)$$

$$E_y = a_y \cos(\omega t - kz + \delta) \dots\dots\dots(3.8b)$$

とかける。電場をベクトル表示するには、ベクトルを太字で書き、x 方向、y 方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y と書くと、

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y \dots\dots\dots(3.9)$$

となる。

3.2.1 直線偏光

x 成分と y 成分が同じ位相であるとき、すなわち、 $\delta = 0$ であるとき、

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{a_y}{a_x} = \tan \chi \dots\dots\dots(3.10)$$

となり、角 χ は場所にも時間にもよらない一定値になる。この式の意味は電場を xy 面に投影したとき、電場が x 軸から角 χ (方位角という)傾いた直線上を振動することを表している。このような光波を直線偏光した光波、あるいは単に直線偏光という。

$\delta = \pi$ のときは同じく直線偏光になるが、

$$E_y = a_y \cos(\omega t - kz + \pi) = -a_y \cos(\omega t - kz)$$

となるので、この場合の傾きは $\pi/2 \leq \chi \leq \pi$ (或いは $-\pi/2 \leq \chi \leq 0$ としてもよい)の範囲に

ある。特別な場合として $E_y = 0$ のときは電場は x 成分 E_x だけになり、x 方向に偏光した直

線偏光になる。同様に $E_x = 0$ の場合には、 E_y のみとなり、y 方向に偏光した直線偏光にな

る。(3.10)式は x 方向に偏光した直線偏光 \mathbf{E}_x と y 方向に偏光した直線偏光 \mathbf{E}_y を合成したと

き、2つの直線偏光の位相が同位相か、あるいは π だけずれているとき、合成波は直線偏光になることを示している。

一般に同位相、あるいは π だけずれた2つの直線偏光 \mathbf{E}_1 、 \mathbf{E}_2 を合成すると \mathbf{E}_1 、 \mathbf{E}_2 のベクトル和の方向を向いた新しい直線偏光が得られる。位相が等しい多くの光波があるときにはそれらを2つずつ合成し、それを繰り返していけば最後には1つの直線偏光の光波にま

とめることができる。また、この合成の逆を考えると、直線偏光はいつでも2つの直線偏光に分解できることになる。更に、ベクトル \mathbf{E} の分解の仕方は無限にあるから、直線偏光に分解する仕方も無限にある。どのように分解するかは、 \mathbf{E} を持つ光波の効果を考え、それぞれの目的に合うように分解すればよい。

3.2.2 円偏光

次に、 $a_x = a_y = a$ であり、且つ位相差が $-\pi/2$ だけずれている場合を考えてみよう。(3.8)

式は

$$E_x = a \cos(\omega t - kz) \dots\dots\dots(3.11a)$$

$$E_y = a \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) = a \sin(\omega t - kz) \dots\dots\dots(3.11b)$$

となる。電場ベクトル $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$ の先端は図 3.2(c)に描かれているように円になる。それは次のようにしても確かめることができる。(3.11)式から

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2$$

となり、合成ベクトルが常に半径 a の円周上にあることがわかる。さらに、

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\sin(\omega t - kz)}{\cos(\omega t - kz)} = \tan \tau \quad \therefore \tau = \omega t - kz$$

t を止めて、ある瞬間に波を見ると方位角 τ は、 z が増加するにつれて、減少する。逆に、 z の位置に止まって時間変化を観察すると、方位角が角速度 ω で増加しているが、これは合成された電場ベクトルが光源方向を向いた観測者から見ると反時計回り(左回り)に回転していることを意味している。この様な光波を左回り円偏光といい、数学的な表記は(3.11)式で与えられる。

位相差 $\pi/2$ の場合には、光を迎える遠方から見ると、合成ベクトルは時計回り(右回り)に回転する。この偏光を右回り円偏光という(図 3.2(b))。

互いに直交し、振幅が等しく、位相が $\pm \pi/2$ だけずれている2つの直線偏光((3.11)式)を合成すると円偏光が得られることがわかった。これは、逆に1つの円偏光は互いに直交し、振幅が等しく、位相が $\pi/2$ だけずれている2つの直線偏光に分解することができることを示している。さらに、直線偏光を左回りと右回りの2つの円偏光に分解することもできる

(図 3.3)。以下にこれを数式で示す。

偏光が x 方向であるとしても一般性を失わないから、 x 方向に偏光した直線偏光を考える。その直線偏光は

$$\begin{aligned} E_x &= a \cos(\omega t - kz) \\ E_y &= 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(3.12)$$

と表せる。これは、

$$0 = \frac{1}{2} a \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} a \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \dots(3.13)$$

に注意すると、(3.12)式で表される直線偏光は次のように分解できることがわかる。

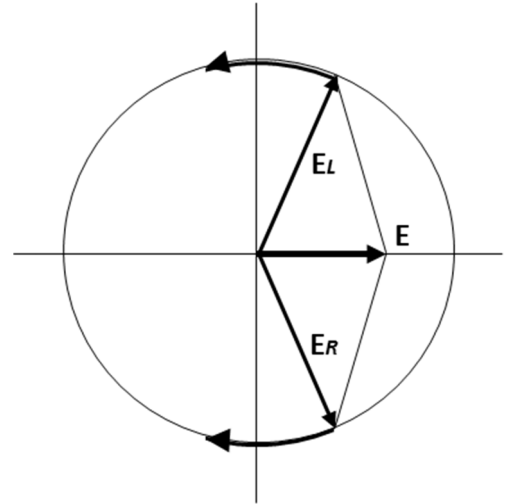


図 3.3 直線偏光の円偏光分解

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a \cos(\omega t - kz) \\ \frac{1}{2} a \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a \cos(\omega t - kz) \\ \frac{1}{2} a \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \dots(3.14)$$

これは x 方向に偏光した、振幅 a の光波は振幅 $a/2$ の左回りの円偏光と同じ振幅の右回りの円偏光の和であることを示している(図 3.3)。なお、 E_y の分解に用いた (3.13)式の分解では振幅を a に取る必要はなく、振幅は任意でよい。その場合には直線偏光は次に述べる左右回りの楕円偏光分解となる。

3.2.3 楕円偏光

(3.8)式で位相差 δ 、振幅 a_x 、 a_y が特別な値をとらないときには合成された光波は楕円偏光になる(図 3.4)。(3.8)式で $(\omega t - kz)$ を消去すると

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{a_x}\right)\left(\frac{E_y}{a_y}\right)\cos\delta = \sin^2\delta \dots\dots\dots(3.15)$$

となるので、合成された電気ベクトル \mathbf{E} の先端は楕円上を回転することになる。楕円の長径軸と x 軸とのなす角、すなわち、楕円の方位角 α (図 3.4)は位相差 δ 、振幅の比で決まり、次式で与えられる。

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_x a_y \cos\delta}{a_x^2 - a_y^2} \dots\dots\dots(3.16)$$

これを以下に示す。それには座標系を (E_x, E_y) 系から α 回転して $(E_{x'}, E_{y'})$ 系に移すことによって、(3.15)式が

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1 \dots\dots\dots(3.17)$$

の楕円の基本形になることを示せばよい。以下では表示を簡単化して $E_x = x, E_y = y; E_{x'} = x', E_{y'} = y'$ と書くと、電気ベクトル \mathbf{E} は XY 座標系では (x, y) 、X'Y'座標系では (x', y') と表される。図 3.5 から x' の X 方向成分は $x' \cos \alpha$ 、 y' の X 方向成分は $-y' \sin \alpha$ で、それらの和が \mathbf{E} の X 方向成分であるから、

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \dots\dots\dots(3.18)$$

同様に y 成分については

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \dots\dots\dots(3.19)$$

(3.18),(3.19)式をまとめて、行列で表せば(行列については付録D行列と行列式参照)、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \dots\dots(3.20)$$

逆に (x, y) から (x', y') への変換は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \dots\dots(3.21)$$

である。

(3.17)式の表式を得るためには、(3.18)、(3.19)式を(3.15)式に代入して $x' y'$ の係数が 0 になるように α を選ばばよい。 $x' y'$ の係数は E_x^2 の項からは

$$E_x^2; -\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{a_x^2} = \frac{-\sin 2\alpha}{a_x^2}$$

同様にして、 $E_y^2, E_x E_y$ の項からの寄与は

$$E_y^2; \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{a_y^2} = \frac{\sin 2\alpha}{a_y^2}$$

$$E_x E_y; -\frac{2 \cos \delta}{a_x a_y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{-2 \cos \delta \cos 2\alpha}{a_x a_y}$$

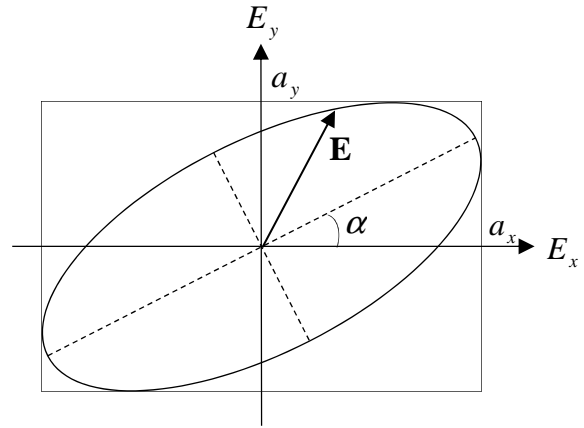


図 3.4 xy 面に投影した電場ベクトルの軌跡(楕円偏光)、 α :方位角

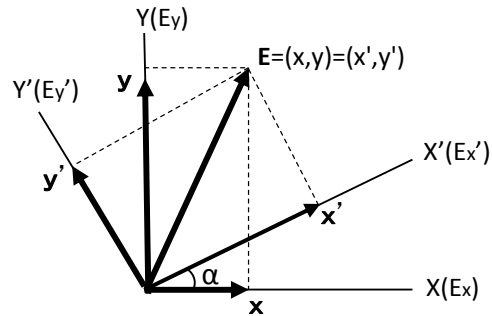


図 3.5 座標変換

これらをまとめて、0 とおくと

$$\left(-\frac{1}{a_x^2} + \frac{1}{a_y^2}\right) \sin 2\alpha - \frac{2 \cos \delta \cos 2\alpha}{a_x a_y} = 0 \quad \therefore \tan 2\alpha = \frac{2a_x a_y \cos \delta}{a_x^2 - a_y^2} \quad \dots (3.22)$$

すなわち、(3.16)式が得られた。

a_x 、 a_y の比を、(3.10)式で導入した補助的な角 $\chi (0 \leq \chi \leq \pi/2)$ 、

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan \chi$$

で表すと、

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_x a_y \cos \delta}{a_x^2 - a_y^2} = \frac{2 \tan \chi \cos \delta}{1 - \tan^2 \chi} = \tan 2\chi \cos \delta \quad \text{但し } \frac{a_y}{a_x} = \tan \chi \quad \dots (3.23)$$

が得られる。

楕円の半長径、半短径 a 、 b は(3.17)式より x^2 、 y^2 の係数を求めればよい。そのためには(3.17)式のように表示されたとき、

$$\begin{aligned} E_x &= a \cos(\omega t - kz + \delta_0) \\ E_y &= \pm b \sin(\omega t - kz + \delta_0) \end{aligned} \quad \dots (3.24)$$

とかけることに注意する。なお、 \pm の符号は電気ベクトルが楕円上を左回り(+符号)と右回り(-符号)に動くことに対応している。 a 、 b を求めるためには(3.21)式の変換を利用する。式を簡単に書くために、

$$\omega t - kz = \tau \quad \dots (3.25)$$

とおき、(3.21)式の変換式 $E_x = E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha$ などに(3.24)式、(3.8)式を代入する。

$$\begin{aligned} E_x &= a(\cos \tau \cos \delta_0 - \sin \tau \sin \delta_0) = a_x \cos \tau \cos \alpha + a_y (\cos \tau \cos \delta - \sin \tau \sin \delta) \sin \alpha \\ E_y &= \pm b(\sin \tau \cos \delta_0 + \cos \tau \sin \delta_0) = -a_x \cos \tau \sin \alpha + a_y (\cos \tau \cos \delta - \sin \tau \sin \delta) \cos \alpha \end{aligned}$$

τ は任意に変われる変数なので、両辺の $\cos \tau$ 、 $\sin \tau$ の係数は等しくなければならない。これより、

$$a \cos \delta_0 = a_x \cos \alpha + a_y \cos \delta \sin \alpha \quad \dots (3.26a)$$

$$a \sin \delta_0 = a_y \sin \delta \sin \alpha \quad \dots (3.26b)$$

$$\pm b \cos \delta_0 = -a_y \sin \delta \cos \alpha \quad \dots (3.27a)$$

$$\pm b \sin \delta_0 = -a_x \sin \alpha + a_y \cos \delta \cos \alpha \quad \dots (3.27b)$$

(3.26a)式と(3.26b)式をそれぞれ自乗して加えると a^2 が得られる。

$$a^2 = (a_x \cos \alpha + a_y \cos \delta \sin \alpha)^2 + a_y^2 \sin^2 \delta \sin^2 \alpha \dots\dots\dots(3.28)$$

$$= a_x^2 \cos^2 \alpha + 2a_x a_y \sin \alpha \cos \alpha \cos \delta + a_y^2 \sin^2 \alpha$$

同様に(3.27a)式と(3.27b)式を自乗して加えると b^2 が得られる。

$$b^2 = a_x^2 \sin^2 \alpha - 2a_x a_y \sin \alpha \cos \alpha \cos \delta + a_y^2 \cos^2 \alpha \dots\dots\dots(3.29)$$

このようにして、(3.8)式で与えられる光波は(3.17)式で表される楕円であり、その半短径と半長径は、(3.8)式の x, y 方向の振幅 a_x, a_y 、及び位相差 δ と(3.16)式で与えられる α から求められる。

(3.28)式と(3.29)式の各辺を加えると、

$$a^2 + b^2 = a_x^2 + a_y^2 \dots\dots\dots(3.30)$$

が得られる。これは、光のエネルギーが \mathbf{E}^2 に比例することと、 x 方向、 y 方向の電場がそれぞれ独立で、エネルギーはそれぞれの和になることを検証したことになっている。

(3.26a)と(3.27a), (3.26b)と(3.27b)をかけて加えると、

$$\mp ab = a_x a_y \sin \delta \dots\dots\dots(3.31)$$

これと(3.30)式から

$$\mp \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{2a_x a_y \sin \delta}{a_x^2 + a_y^2} = \sin 2\chi \cdot \sin \delta \dots\dots\dots(3.32)$$

が得られる。第2式から第3式へ移るには(3.10)式を使った。(3.10)式の a_y/a_x と同じように b/a に対しても補助的な角 β を導入する(図3.6)。 β を楕円率角という。

$$\mp \frac{b}{a} = \tan \beta \dots\dots\dots(3.33)$$

$$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{右回り楕円偏光(+)}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq 0 \quad \text{左回り楕円偏光(-)}$$

ここで角 β を、 \pm をつけて定義したのは、左右回りの偏光の区別が β のとりうる範囲によって表せることによる。即ち、 β を+に取ることは(3.24)式で $\pm b$ の-に対応し、右回り偏光を意味し、逆に β を-にとることによって $\pm b$ の+に対応し、左回りの偏光をあらわすことができる。

(3.33)式を(3.32)式に代入すると、

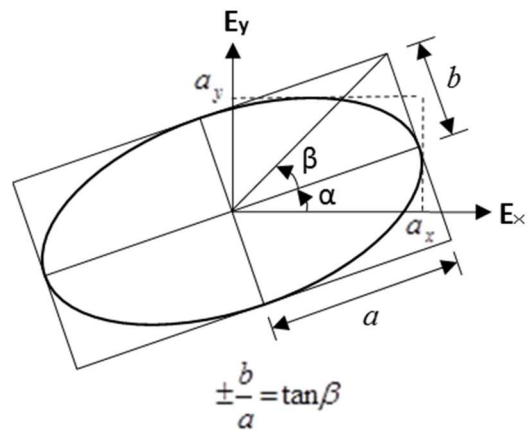


図 3.6 楕円偏光のパラメータ

$$\sin 2\beta = \frac{2a_x a_y \sin \delta}{a_x^2 + a_y^2} = \sin 2\chi \cdot \sin \delta \cdots \cdots \cdots (3.34)$$

の関係式が得られる。

以上で得た結果をまとめると、楕円の半長径 a 、半短径 b および長軸が x 軸となす角を α とすると、

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= a_x^2 + a_y^2 \\ \tan 2\alpha &= \tan 2\chi \cdot \cos \delta \quad \text{但し、} \frac{a_y}{a_x} = \tan \chi, \quad \pm \frac{b}{a} = \tan \beta \cdots \cdots \cdots (3.35) \\ \sin 2\beta &= \sin 2\chi \cdot \sin \delta \end{aligned}$$

これより、 E_x, E_y が与えられたとき ((3.8)式)、電気ベクトルの先端がどのような楕円を描くかが分かる。逆に半長径、半短径の長さ a, b と長軸の向き α が与えられると振幅 a_x, a_y と位相差 δ を決めることができる。

あとで必要になる次式

$$\frac{a_x^2 - a_y^2}{a_x^2 + a_y^2} = \cos 2\chi = \cos 2\beta \cos 2\alpha \cdots \cdots \cdots (3.36)$$

$$\frac{2a_x a_y \cos \delta}{a_x^2 + a_y^2} = \sin 2\chi \cdot \cos \delta = \cos 2\beta \sin 2\alpha \cdots \cdots \cdots (3.37)$$

も得られる。(3.36)式の第2式から第3式へは(3.35)式で δ を消去することによって、また、(3.37)式は(3.35)式の第2式に(3.36)式の $\cos 2\chi$ を代入することによって得られる。

直線偏光は楕円偏光の短径の大きさが 0 に近づいた極限の場合として、また、円偏光は楕円の短径と長径が等しくなった場合で、いずれも楕円偏光の一部と見なすことができる。

結果をまとめると、(3.8)式で表される光波は一般には楕円偏光になり、(3.16)式で与えられる方位角をとる。

- (1) $-\pi < \delta < 0$ 、左回りの楕円偏光
- (2) $\delta = 0$ 、直線偏光
- (3) $0 < \delta < \pi$ 、右回りの楕円偏光
- (4) $\delta = \pi$ 、直線偏光

$a_x = a_y$ の場合に、位相差 δ によって偏光状態が変化する様子を図 3.7 に示してある。

これまでは、位相差、振幅比が x 成分、 y 成分の間で確定している場合について述べてきた。このような光波を**完全に偏っている光波**〔完全偏光〕という。直線偏光、円偏光、楕円偏光は全て完全偏光である。これに対して、太陽光や白熱電球からの光は位相も振幅も時間的

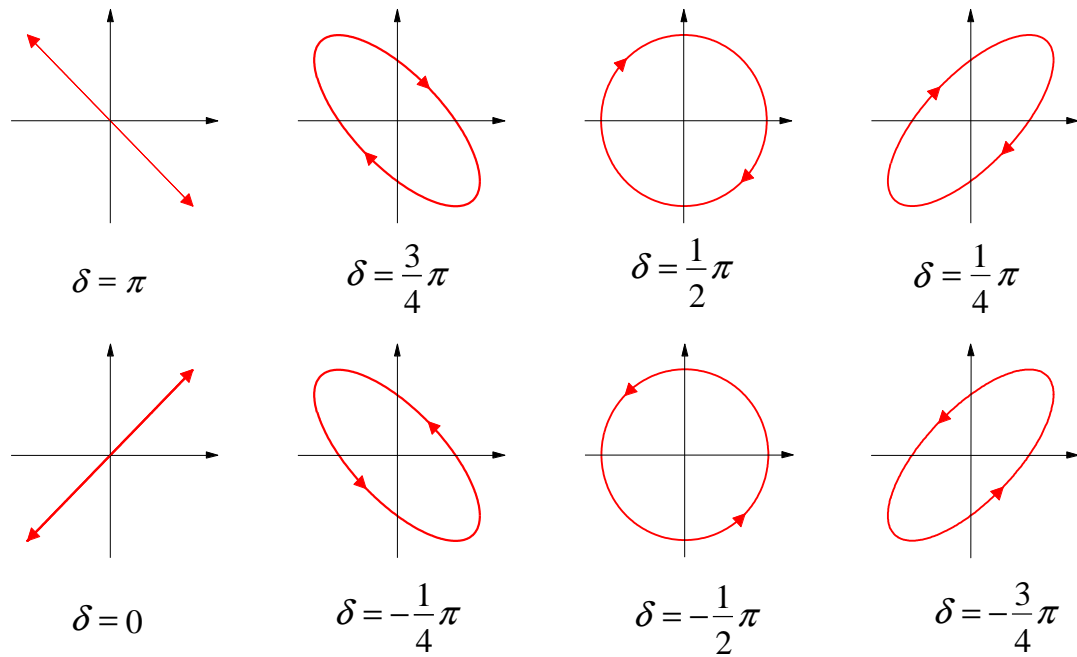


図 3.7 δ による偏光状態の変化。ただし、 $a_x = a_y$

に全く乱雑に変化しているので、全ての偏光状態が同じ確率で現れ、偏光特性を示さない。自然光は無偏光である。窓ガラスでの反射光や、青空などの散乱光には偏りを持った成分が含まれている。この様な光は部分偏光しているという。以上述べてきたことにより、完全偏光である楕円偏光(極限として円偏光、直線偏光も含む)は長軸が x 軸となす方位角 α 、半長径 a 、半短径 b と楕円上を電気ベクトルの先端が回転する方向(左右回り)で完全に決まる。

偏光の形状を見るためには、光強度を統一して比べればよいから、光の時間平均強度に相当する $(a^2 + b^2)$ を 1 にとることとする。短径と長径の比を、(3.33)式に示したように、

$$\tan|\beta| = \frac{b}{a}, \quad (-\pi/4 \leq \beta \leq \pi/4) \text{ とおき、} \beta \text{ が正のとき右回り楕円偏光、負のとき左回り楕円偏光と決めれば、偏光状態は角 } \alpha, \beta \text{ で決まる(図 3.6 参照)。この偏光状態を球上の点によって表す方法がアンリ・ポアンカレ(1892 年ころ)によって考え出された。これをポアンカレ球といい、} 2\beta \text{ が緯度を表し、} \beta \text{ が正のときは北緯で、負のときは南緯を意味する(図 3.8)。これによって北半球にある点は右回り偏光、南半球にある点は左回り偏光になる。赤道は } \beta \text{ が } 0 \text{ なので、これは短径 } b=0 \text{ で長軸だけの直線偏光を表す。又北極点は } \beta = 45^\circ \text{ なので } a=b \text{ となり、右回り円偏光を表す点になる。南極点は左回り円偏光である。}$$

α は x 軸に対する長軸の傾きを表す量である(図 3.6)。ポアンカレ球では、 2α は経度を表す量である。赤道上で、かつ経度 0 の点は水平な直線偏光であり、 α が増えるにつれて水平状態から上を向いた直線偏光になり、 $2\alpha = 180^\circ$ 、すなわち、 $\alpha = 90^\circ$ では垂直直線偏光になる。西経度に相当する $\alpha < 0$ では図に示したように水平に対して右下がりの直線偏光になる。このように、偏光の形は球上の 1 つの点で表すことが出来、球上の 1 つ 1 つの点は異なる。

った偏光の形を表していることがわかる。

互いに垂直な直線偏光は球の中心をはさんだ直径の両端の点であることも明らかであろう。即ち、方位角 α の直線偏光に垂直な偏光は方位角が $\alpha + \frac{\pi}{2}$ であるから、赤道上的の点は $\pi + 2\alpha$ となり、2つの点は π だけずれており、中心点を挟んで反対側にある。赤道上的の点ばかりでなく、球の中心を通る任意の直径の両端で表せる楕円偏光も互いに直交している。

これまで偏光状態の数学的な表示について述べてきた。偏光状態の基本表示は(3.7)式、あるいは(3.8)式である。では、実際にある光の偏光状態を知るにはどうすればよいだろうか。偏光状態を実測によって知ることは重要である。たとえば、ある定まった偏光を持った光を物質の表面に当て、反射光の偏光状態の変化から物質の物性に対する知見を得ることができる。このような装置は分光エリプソメトリーとして知られている。この装置では偏光状態を特定することが基本操作である。偏光状態を実測で求める方法はいろいろ考えられるが、ストークスによって提案された方法とその偏光状態の表示はストークス・ベクトルとして知られている。以下にこれを説明する。

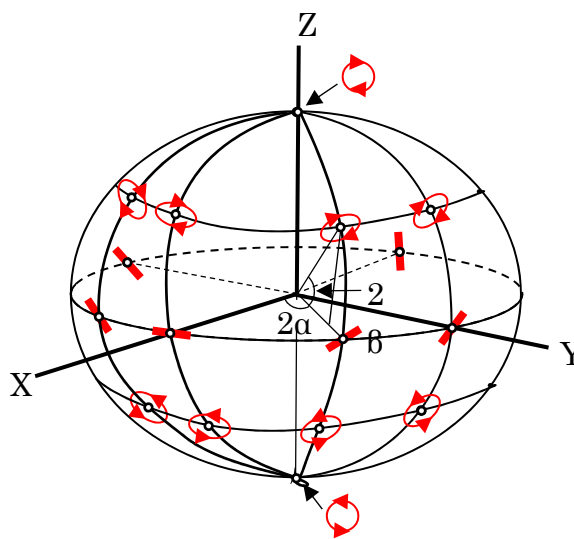


図 3.8 偏光のポアンカレ球表示

3.3 偏光の測定と表示

3.3.1 偏光とストークス・パラメータ

知りたいことは、測定によって(3.8)式を得ることで、それには a_x , a_y , δ の3個のパラメータが求められればよい。測定には光強度測定器、直線偏光子、右回り円偏光のみを透過する偏光子を用いて行う。後者の2つの偏光子は偏りの無い入射光に対して透過率が50パーセントあるものとする。偏光子の表面や、裏面で反射があり、さらに光吸収もわずかにあるだろうから、このような理想的な偏光子は無い。実際の測定でこの不具合を除くには、たとえば、2つの直線偏光子を偏光方向が平行になるように並べて光を通し、第1の偏光子のすぐ後の光強度(I_1)と、2番目の偏光子の後の光強度(I_2)を測定し、 I_1/I_2 を補正項として、実際の測定値に掛けてやればよい。

空中を伝播する電場 \mathbf{E} の電磁波が持つ単位体積当たりのエネルギーは $\epsilon_0 E^2$ である。ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率である。このエネルギーが光速 c で運ばれるから、光検出器は単位時間、単位面積当たり $c\epsilon_0 E^2$ のエネルギーを観測することになる。光強度は電場の自乗に

比例するのである。 $c\epsilon_0$ は常数であるから、以下で光強度を $I = E^2$ で表すことにする。 I は電場の自乗である。なお、測定にかかる時間に対して光の周期 (10^{-15} s) は十分短いので、測定値は何時でも時間平均を取ったものになっていることに注意する。

測定 1 光の進行方向に対して光検出器を垂直に置き、光強度を測定する。これによって

$$I_0 = \frac{a_x^2 + a_y^2}{2} \dots\dots\dots(3.38)$$

が得られる。なぜなら、測定値は強度の時間平均であるから、光の周期に比べて十分長い時間 T にたいして、 $\tau = \omega t - kz$ とおくと、

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T (E_x^2 + E_y^2) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (a_x^2 \cos^2 \tau + a_y^2 \cos^2 (\tau + \delta)) dt = \frac{a_x^2 + a_y^2}{2}$$

となる。ここで以下の式を使った。

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 (\omega t - kz) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2(\omega t - kz)}{2} dt = \frac{1}{2}$$

測定 2 直線偏光子を使って、水平偏光成分の光強度のみを測定する。これによって

$$I_x = \frac{a_x^2}{2} \dots\dots\dots(3.39)$$

が得られる。

測定 3 直線偏光子を使って、水平に対して 45° の直線偏光成分を測定する。

(3.8)式から 45° 方向の電場成分は $E_x \cos 45^\circ + E_y \sin 45^\circ$ であるから、時間平均を $\bar{\quad}$ で表すと

$$\begin{aligned} I_{45} &= \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} E_x + \frac{1}{\sqrt{2}} E_y \right)^2} = \frac{1}{2} \overline{(a_x \cos \tau + a_y \cos(\tau + \delta))^2} \dots\dots\dots(3.40) \\ &= \frac{a_x^2}{4} + \frac{a_y^2}{4} + \frac{1}{2} a_x a_y \cos \delta \end{aligned}$$

測定 4 右回り円偏光のみを透過する偏光子を置き、その透過光強度を測定する。

(3.8) 式で x 方向の電場を左右回りの円偏光に分解すると、

$$\begin{pmatrix} E_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_x \cos \tau \\ \frac{1}{2} a_x \sin \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_x \cos \tau \\ -\frac{1}{2} a_x \sin \tau \end{pmatrix}$$

右辺の第 1 項は左回り円偏光、第 2 項は右回り円偏光である。 E_y についても同様に左
右回り円偏光に分解すると、結局右回り偏光は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_x \cos \tau \\ -\frac{1}{2} a_x \sin \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_y \sin(\tau + \delta) \\ \frac{1}{2} a_y \cos(\tau + \delta) \end{pmatrix}$$

となるから、

$$\begin{aligned} I_R &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[\overline{\{a_x \cos \tau + a_y \sin(\tau + \delta)\}^2} + \overline{\{-a_x \sin \tau + a_y \cos(\tau + \delta)\}^2} \right] \\ &= \frac{a_x^2}{4} + \frac{a_y^2}{4} + \frac{1}{2} a_x a_y \sin \delta \end{aligned} \quad \cdot(3.41)$$

ストークス・パラメータ $S_0 \sim S_3$ はこれらの測定値を用いて次のように定義される。

1) S_0 は $2I_0$ 、すなわち、測定 1 で得られた値の 2 倍で定義される。

$$S_0 = 2I_0 = a_x^2 + a_y^2 \quad \cdot(3.42)$$

2) S_1 は水平偏光成分の強度(測定 2 で得られた値 I_x)を 4 倍したものから S_0 を引いた値で
ある。

$$S_1 = 4I_x - S_0 = a_x^2 - a_y^2 \quad \cdot(3.43)$$

3) S_2 は 45° 偏光成分の強度(測定 3 で得られた値 I_{45})を 4 倍したものから S_0 を引いた値で
ある。

$$S_2 = 4I_{45} - S_0 = 2a_x a_y \cos \delta \quad \cdot(3.44)$$

4) S_3 は右回り円偏光の強度(測定 4 で得られた値 I_R)を 4 倍したものから S_0 を引いた値で
ある。

$$S_3 = 4I_R - S_0 = 2a_x a_y \sin \delta \quad \cdot(3.45)$$

これらの結果をまとめて、ベクトルとして書くと、

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x^2 + a_y^2 \\ a_x^2 - a_y^2 \\ 2a_x a_y \cos \delta \\ 2a_x a_y \sin \delta \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.46)$$

このように表わすとストークス・パラメータは4次元のベクトルを形成しているので、(3.46)式で表わされる \mathbf{S} をストークス・ベクトルという。

基準化されたパラメータ；ストークス・パラメータは光強度を含めたものであるが、光強度の絶対値は必要でなく、パラメータの相対値だけで十分な場合がある。そのようなときには全パラメータを $S_0 = a_x^2 + a_y^2$ で割った値を用いればよい。このとき、このパラメータを**基準化したパラメータ**という。

S_0, S_1 から a_x, a_y が求まり、 S_2, S_3 から位相差 δ が得られる。このように完全偏光した光については、偏光状態は測定 1～4 の 4 個の測定によって完全に決まる。 S_1 が負になるときは、垂直偏光成分が勝っていることは $S_0 = 2(I_x + I_y)$ より、 $S_1 = 2I_x - 2I_y$ とも書けることから、明らかであろう。同じことは S_2, S_3 についても言える。 $S_0 = 2(I_{45} + I_{-45})$ ともかけるから、 $S_2 = 2(L_{45} - L_{-45})$ となり、 S_2 の符号は 45° 方向偏光の電場のエネルギーと -45° 方向偏光の電場のエネルギーの差で決まる。同様に S_3 の符号は左回りと右回り円偏光のエネルギー差で決まる。

完全偏光した光では、

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \dots\dots\dots (3.47)$$

が成り立っている。

ストークス・パラメータは測定 1～4 によって決まるものであるから、(3.7)式、あるいは(3.8)式のような完全偏光した光ばかりでなく、全く偏りのない光や部分偏光した光についても定まる量である。全く偏りのない光の場合、

$$S_0 = a_x^2 + a_y^2, \quad S_1 = S_2 = S_3 = 0 \dots\dots\dots (3.48)$$

となる。部分偏光は偏りのない光と偏光した光が混在しているから、

$$S_0^2 > S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \dots\dots\dots (3.49)$$

となる。

光の偏光の度合いを示す偏光度 p は、

$$p = \frac{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{\frac{1}{2}}}{S_0} \dots\dots\dots (3.50)$$

で与えられる。完全偏光では(3.45)式からも明らかなように p は 1 になり、部分偏光では p は 1 より小さい。非偏光では $p = 0$ である。完全偏光した光が、表面が粗い物体で反射すると光の一部は散乱されて、偏光が崩れるから、反射光は部分偏光になる。この場合、偏光度は $p < 1$ に下がる。このようにしてストークス・パラメータは光の偏光状態を完全偏光ばかりでなく、部分偏光状態も記述できるパラメータになっている。

重要な偏光状態をストークス・ベクトルで表わすと次のようになる。

まったく偏りのない光

$$S = \begin{pmatrix} a_x^2 + a_y^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

直線偏光

光波の一般式(3.8)式で、直線偏光は $\delta = 0$ (または π) であり、偏光方向が水平軸から角 χ 傾いているとき(3.10)式より $a_y = a_x \tan \chi$ ($\delta = \pi$ のとき、 χ は負)となるので、これを(3.46)

式に代入すると

$$S_{L\chi} = \begin{pmatrix} a_x^2 + a_x^2 \tan^2 \chi \\ a_x^2 - a_x^2 \tan^2 \chi \\ 2a_x^2 \tan \chi \\ 0 \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\chi \\ \sin 2\chi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$S_{L\chi}$ の添え字 L は直線偏光(Linear polarization)の頭文字を用いた。水平偏光では $\chi = 0$ 、垂直偏光では $\chi = 90^\circ$ とおけばよいから、

$$\text{水平直線偏光 } S_{L-} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{垂直直線偏光 } S_{L\perp} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

水平軸から 45° 、あるいは -45° 傾いた偏光では $\chi = \pm 45^\circ$ とおいて、

$$45^\circ \text{ 傾いた直線偏光 } S_{L45} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -45^\circ \text{ 傾いた直線偏光 } S_{L-45} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

円偏光

(3.11)式より、 $a_x = a_y = a$ であり、左回り円偏光では $\delta = -\frac{\pi}{2}$ 、右回り円偏光では $\delta = \frac{\pi}{2}$

であるから、これらの値を(3.46)式に代入して、

$$\text{左回り円偏光 } \mathbf{S}_{LC} = \begin{pmatrix} 2a^2 \\ 0 \\ 0 \\ -2a^2 \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{右回り円偏光 } \mathbf{S}_{RC} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

楕円偏光

楕円偏光は(3.46)式そのものとなる。

3.3.2 ポアンカレ球とストークス・パラメータ

ストークス・パラメータ(3.41~3.44)式を $a_x^2 + a_y^2$ で規格化した量はすでに計算した。それらは(3.34)、(3.36)、(3.37)式で、 S_1 は(3.36)式であり、 S_2, S_3 はそれぞれ(3.37)式、(3.34)式で表されている。これらの式によって、ストークス・パラメータは楕円の方位角 α と補助角 β ($\pm b/a = \tan \beta$) と直接結びついている。すなわち、

$$S_0 = 1 \quad (3.56)$$

$$S_1 = \frac{a_x^2 - a_y^2}{a_x^2 + a_y^2} = \cos 2\beta \cos 2\alpha \quad (3.57)$$

$$S_2 = \frac{2a_x a_y \cos \delta}{a_x^2 + a_y^2} = \cos 2\beta \sin 2\alpha \quad (3.58)$$

$$S_3 = \frac{2a_x a_y \sin \delta}{a_x^2 + a_y^2} = \sin 2\beta \quad (3.59)$$

が得られる。ポアンカレ球の半径を 1 に取ったとき、 S_1, S_2, S_3 はそれぞれ球上の点 P の x, y, z 座標になっている(図 3.9)。このように、ストークス・パラメータはポアンカレ球で表される偏光と直接対応していることがわかる。ポアンカレ球で指定された点より、角 α, β によって楕円の方位角と楕円率が決まり、また、座標位置よりストークス・パラメータ S_1, S_2, S_3 も得られる。

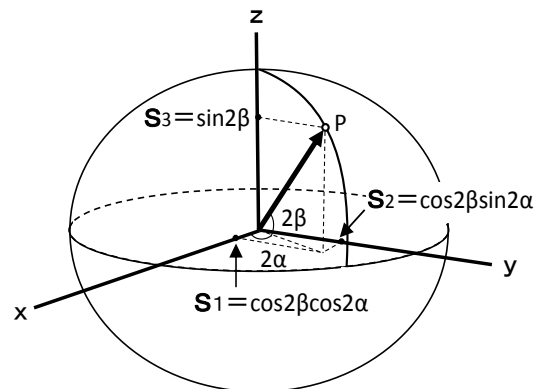


図 3.9 ポアンカレ球上の点とストークス・パラメータ

全く偏りのない光はポアンカレ球では球面上に均一に分布した点で表され、部分偏光はその状態に応じて種々に表わされる。たとえば、ある点の周りに局在した点の分布などである。このようにストークス・パラメータは完全偏光でない状態も記述できる点で優れているが、完全偏光のみを扱うのであれば、次に述べるジョーンズ・ベクトルがより簡単で、扱いやすい。

3.3.3 偏光とジョーンズ・ベクトル

平面波の偏光を簡明に表わすジョーンズ・ベクトルは R.C.Jones によって考案された。ジョーンズ・ベクトルは複素数で表示されるので、これまで扱ってきた波動関数を複素数であらわす必要がある。角振動数 ω で z 方向に進む電場は(3.7)式、あるいは(3.8)式で表わされる。電場の x 成分 $E_x = a_x \cos(\omega t - kz + \delta_x)$ ((3.7)式)を例にとり、複素数表示について説明する(複素数表示の詳細については付録B参照)。

$$E_x = a_x \cos(\omega t - kz + \delta_x) = \text{Re } a_x e^{i(\omega t - kz + \delta_x)} = \text{Re } A_x e^{i(\omega t - kz)}$$

ただし、 $A_x = a_x e^{i\delta_x}$ (3.56)

ここで Re は後に続く式の実数を取ることを意味する。虚数を取るときは式の前に Im を書くことになっている。

そこで E_x を

$$E_x = A_x e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.57)$$

とし、実際の電場はいつでも(3.57)式の実数部をとると約束するのである。たとえば、 $E_x = ie^{i(\omega t - kz)}$ の場合には、

$$E_x = \text{Re } ie^{i(kz - \omega t)} = \text{Re } i[\cos(\omega t - kz) + i \sin(\omega t - kz)] = -\sin(\omega t - kz)$$

となり、複素数表示の $ie^{i(\omega t - kz)}$ は $-\sin(kz - \omega t)$ を意味している。このようにいつでも実数部をとると約束すると z 方向に進む平面波の一般式(3.7)式は

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{ただし、} A_x = a_x e^{i\delta_x}, A_y = a_y e^{i\delta_y} \quad (3.58)$$

これらの定義を使えば、(3.8)式の複素数表示では $A_x = a_x$, $A_y = a_y e^{i\delta}$ である。

ジョーンズ・ベクトル \mathbf{J} は $A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y$ で、2行の列ベクトルで書かれる。

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

すなわち、時間と位置に依存する共通項 $e^{i(\omega t - kz)}$ の係数だけで電場を記述するのである。 $e^{i(\omega t - kz)}$ は共通項であるから、ベクトル \mathbf{J} は電場についての全ての情報、すなわち、振幅と位相についての情報を持っているから、電場を完全に記述していることになる。

光の強度は $|A_x|^2 + |A_y|^2$ で表わされるが、光の反射、吸収など、多くの測定では光強度の相対的な変化だけが測定され、強度の絶対値は必ずしも必要としない場合が多い。このことを考慮して、通常は強度を 1 に規格化したベクトルを用いる。この規格化によって光の強度に関する情報は失われるが、偏光については完全に記述できる。規格化によってジョーンズ・ベクトルは

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{A_x}{\sqrt{|A_x|^2 + |A_y|^2}} \\ \frac{A_y}{\sqrt{|A_x|^2 + |A_y|^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} e^{i\delta_x} \\ \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} e^{i\delta_y} \end{pmatrix} = \frac{e^{i\delta_x}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

実際の波動関数はこのベクトルに $e^{i(\omega t - kz)}$ をかけて得られる。それは(3.7)式で表わされた波動関数に対応している。ジョーンズ・ベクトルは、絶対値が 1 で x、y 共通の $e^{i\delta_x}$ を抜かした

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

と書かれることが多い。(3.61)式に $e^{i(\omega t - kz)}$ をかけて得られる波動関数は(3.8)式に対応するものである。物理的には(3.7)式と(3.8)式は同じものであるから、(3.59)式で定義されるジョーンズベクトルと(3.61)式で定義されるものとは同じものである。x、y 成分に共通な任意の位相を加えてよいから、

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \begin{pmatrix} a_x e^{-i\delta} \\ a_y \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

も(3.61)式と同じもので、同一の偏光状態を表わしている。

水平軸(x 軸)方向を向いた直線偏光(\mathbf{J}_{L-})、垂直軸(y 軸)方向を向いた直線偏光のジョーンズ・ベクトル($\mathbf{J}_{L\perp}$)は

$$\mathbf{J}_{L-} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{L\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

となる。同様に水平軸から 45° 傾いた直線偏光、 -45° 傾いた直線偏光のジョーンズ・ベクトルはそれぞれ、

$$\mathbf{J}_{L45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{L-45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

とかける。水平軸から角 χ 傾いた直線偏光のジョーンズ・ベクトルは次のように書ける。

$$\mathbf{J}_{L\chi} = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

左回り円偏光は $a_x = a_y$, $\delta = -\pi/2$ であったから、

$$\mathbf{J}_{LC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

右回り円偏光は $a_x = a_y$, $\delta = \pi/2$ であるから、

$$\mathbf{J}_{RC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

まとめると、(3.8)式に対応するジョーンズ・ベクトルは次のようになる。

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \cdot e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad \tan \chi = \frac{a_y}{a_x} \quad (3.68)$$

2つの偏光 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ が互いに直交しているとは、これらのベクトルのスカラー積の時間平均が0になることである。実数表示で書くと、

$$\overline{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2} = \overline{E_{1x}E_{2x} + E_{1y}E_{2y}} = 0$$

が成り立つことである。ジョーンズ・ベクトルは複素数表示であるから、その場合は片方の複素共役を取って掛けてやればよいから(付録B参照)、ジョーンズ・ベクトル $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ で表される2つの偏光が互いに直交しているとは、

$$\mathbf{J}_1^* \cdot \mathbf{J}_2 = 0 \quad (3.69)$$

である(ベクトルの掛け算については付録D参照)。例えば、 \mathbf{J}_{L45} と \mathbf{J}_{L-45} は(3.64)式から

$$\mathbf{J}_{L45}^* \cdot \mathbf{J}_{L-45} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

となり、これらのベクトルは互いに直交している。同様に左回り円偏光と右回り円偏光は、(3.66)式と(3.67)式から

$$\mathbf{J}_{LC}^* \cdot \mathbf{J}_{RC} = \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + (-i)^* \cdot i) = 0$$

となり、左回り円偏光と右回り円偏光は互いに直交している。

一般式でこの直交条件を表わすと、 $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ に直交する偏光ベクトルは $\begin{pmatrix} -m^* \\ n^* \end{pmatrix}$ である。それ

ゆえ、(3.68)式で表わされる偏光に直交する偏光は

$$\begin{pmatrix} -\sin \chi \cdot e^{-i\delta} \\ \cos \chi \end{pmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix} \sin \chi \\ -\cos \chi \cdot e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

である。

ジョーンズ・ベクトルは電場の変動部分を共通項として書かないだけであるから、実際の電場はいつもその項がついていることを忘れてはならない。それ故、2つのジョーンズ・ベクトルは、同じ共通項を持っていれば加算することができる。同じ振幅の左右回り円偏光は、

$$\mathbf{J}_{LC} + \mathbf{J}_{RC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

となり、同じ振幅の左右回りの円偏光を加えると x 方向に偏光した直線偏光が得られる(図 3.3 参照)。また、x、y 方向の同じ振幅の直線偏光を加えると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

となるから 45° 傾いた直線偏光が得られる。ただし、(3.60)、(3.61)式で注意したようにジョーン・ベクトル表示では x、y 成分の共通の位相を無視しているから、(3.71)、(3.72)式のように 2つの偏光を加えるときには注意が必要である。ここでは 2つの偏光は同じ初期位相と同じ振幅を仮定している。水平方向の直線偏光と垂直方向の直線偏光との和を一般的な形式で表すと

$$\mathbf{J}_{L-} = a_x \begin{pmatrix} e^{i\delta_x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{L\perp} = a_y \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

2つの光波を加えると、

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a_x e^{i\delta_x} \\ a_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

これは任意の振幅と位相を持つ互いに直交する光波を合わせると楕円偏光になることを示しており、また、逆に楕円偏光は互いに直交する直線偏光に分解できることも示している。

偏光状態の直交性については、すでに(3.69)、(3.70)式で述べたが、ここで、ポアンカレ球上の点ではどのような関係になっているかを再確認しておこう。(3.68)式で与えられる偏光は図 3.9 の P 点であり、 (χ, δ) と図の角 (α, β) とは(3.35)式で関係付けられている。(3.68)式で与えられる偏光状態に直交するジョーンズ・ベクトルは(3.70)式で与えられる。(3.70)式は三角関数の公式(付録 A 参照)を使って、以下のように書き換えられる。

$$\begin{pmatrix} \sin \chi \\ -\cos \chi \cdot e^{i\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

このジョーンズ・ベクトルの x, y 成分の振幅比は $\tan\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right)$ であるから、(3.35)式で $\chi \rightarrow$

$\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right)$ と置き換えれば、(3.75)式で表される偏光状態のポアンカレ球上の点の角 $(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp})$

は(3.35)式から

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha_{\perp} &= \tan 2\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) \cos \delta = \tan 2\chi \cos \delta = \tan(2\alpha + \pi) \\ \sin 2\beta_{\perp} &= \sin 2\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) \sin \delta = -\sin 2\chi \sin \delta = \sin(2\beta + \pi) \end{aligned} \quad (3.76)$$

となる。これにより、互いに直交する偏光はポアンカレ球の中心を通る直径の両端にあることが分かる。

これまで偏光を表す方式としてストークス・ベクトルとジョーンズ・ベクトルがあることを説明してきた。これらのベクトルにはそれぞれに利点があり、両ベクトルとも用いられている。これまでの結果をまとめると以下ようになる(図 3.10 参照)。

電場の波動関数とパラメータ間の関係

$$\begin{aligned} E_x &= a_x \cos(\alpha t - kz) \\ E_y &= a_y \cos(\alpha t - kz + \delta) \end{aligned}$$

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan \chi \quad \frac{b}{a} = \tan \beta$$

$$\tan 2\alpha = \tan 2\chi \cos \delta$$

$$\sin 2\beta = \sin 2\chi \sin \delta$$

χ, β は x, y 方向の振幅比、楕円の長径と短径の比を角度で表したもの、 α は水平軸(x 軸)と長径軸とのなす角である。このようにパラメータを置くと、

ジョーンズ・ベクトル

$$\frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y e^{i\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

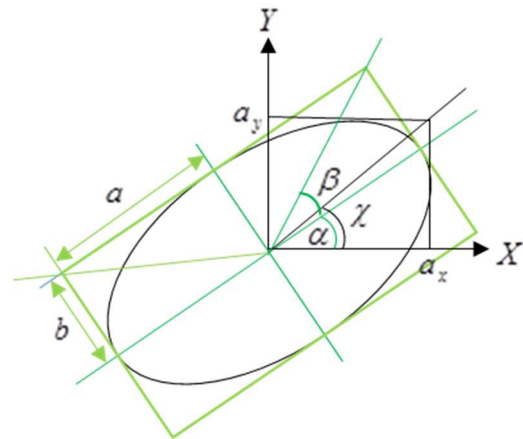


図3.10 楕円偏光のパラメータ

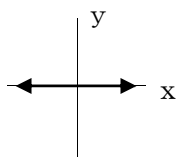
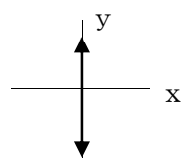
$0 < \delta$ 右回り、 $0 > \delta$ 左回り

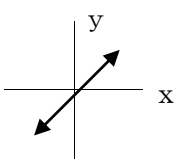
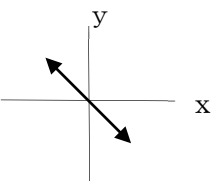
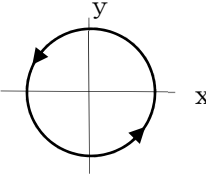
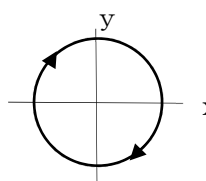
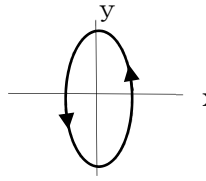
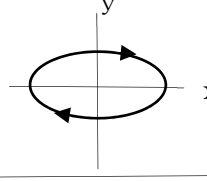
ストークス・ベクトル

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x^2 + a_y^2 \\ a_x^2 - a_y^2 \\ 2a_x a_y \cos \delta \\ 2a_x a_y \sin \delta \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\chi \\ \sin 2\chi \cos \delta \\ \sin 2\chi \sin \delta \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\beta \cos 2\alpha \\ \cos 2\beta \sin 2\alpha \\ \sin 2\beta \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

$0 < \beta$ 右回り $0 > \beta$ 左回り

表 3.1 偏光状態のベクトル表示

偏光		ジョーンズ・ベクトル	ストークス・ベクトル
直線偏光 x(水平)方向		$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
直線偏光 Y(垂直)方向		$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

直線偏光 45°方向		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
直線偏光 135°方向		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
左回り円偏光		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
右回り円偏光		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
左回り楕円偏光		$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -0.6 \\ 0 \\ -0.8 \end{pmatrix}$
右回り楕円偏光		$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$

付録 A 三角関数

原点を中心とした半径 r の円を考え、その円周上の点 P (座標 (x, y)) と原点 O を結ぶ線 \overline{OP} と x 軸とのなす角を A とする。図を参照にして、三角関数の定義

$$\sin A = \frac{y}{r} \quad \cos A = \frac{x}{r} \quad \tan A = \frac{y}{x} \quad (\text{A1})$$

この定義より

$$x = r \cos A, \quad y = r \sin A$$

三角関数の重要な公式

三角関数の定義と図から次の関係式が得られる。

$$\sin(-A) = -\sin A, \quad \cos(-A) = \cos A \quad (\text{A2})$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

(A3)

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1 \quad (\text{A4})$$

加法定理

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad (\text{A5})$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad (\text{A6})$$

下記の 4 つの式は上式から得られるので (A5)、(A6) を覚えるだけで十分である。

(A5)、(A6) 式で $B \rightarrow -B$ とし、(A2) を使えば

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad (\text{A7})$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad (\text{A8})$$

(A5)、(A6) 式で $B = A$ とおけば、

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A \quad (\text{A9})$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \quad (\text{A10})$$

(A3) で $A \rightarrow 2A$ とし、(A9)、(A10) を使えば、

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \quad (\text{A11})$$

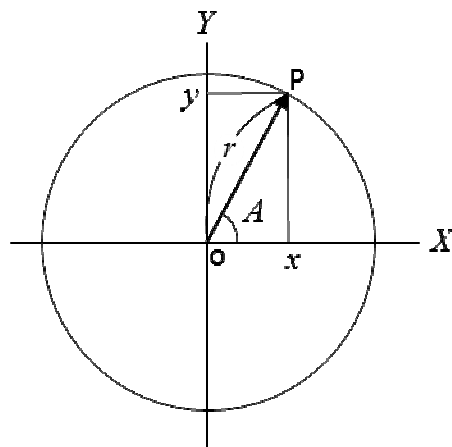
(A10) に (A4) を代入することによって、次式が得られる。

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}, \quad \cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2} \quad (\text{A12})$$

$\cos A$ 、 $\sin A$ の級数展開 $A < 1$ で

$$\cos A = 1 - \frac{1}{2} A^2 + \dots \quad (\text{A13})$$

$$\sin A = A - \frac{1}{6} A^3 + \dots \quad (\text{A14})$$



図A1 三角関数

上の展開式は角度 A をラジアン(Rd)で表したときに成り立つ式である。

角を表すには日常的には度を使うが、数学ではラジアンを使う。ラジアンは、円弧と半径の比、で表す。 360° をラジアンで表せば、円の半径を r として

$$360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ ラジアン(Rd)} \quad (\text{A15})$$

これから

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = 0.017453 \text{ ラジアン(Rd)} \quad (\text{A16})$$

$$1 \text{ ラジアン} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.295^\circ \quad (\text{A17})$$

ラジアンを用いると、 \cos 関数、 \sin 関数は周期 2π の周期関数である。

(A13), (A14)の展開式を最初の項で近似した場合

$$\cos A = 1 - \frac{1}{2}A^2, \quad \sin A = A, \quad \tan A = A \quad (\text{A17})$$

近似の度合いを表で確かめられたい。

A(度)	A(ラジアン)	$\sin A$	$\cos A$	$1 - 0.5A^2$
1	0.017453	0.017452	0.999848	0.999848
2	0.034907	0.034899	0.999391	0.999391
5	0.087266	0.087156	0.996195	0.996192
10	0.174533	0.173648	0.984808	0.984769

付録 B 電磁波の複素数表示

複素数について

二次方程式 $x^2 = -1$ の解である虚数根 $\sqrt{-1}$ を含む数を複素数という。虚数根 $\sqrt{-1}$ を i (imaginary の頭文字) と記すのが習わしである(電気関係の書では j と書くこともある)。複素数 c は一般に次のように表される。 a, b を実数として

$$c = a + ib \quad \text{ただし、} i = \sqrt{-1} \quad (\text{B1})$$

a を複素数 c の実数部(real part), b を虚数部(imaginary part)と呼ぶ。複素数は平面上の点で表すことができる。横軸(x 軸)を実軸、縦軸(y 軸)を虚軸にとると、複素数 c は座標 (a, b) の点で表され、図 B1 のようになる。点 P が複素数 c をあらわす点である。

複素数 c の i を $-i$ に変えた数を複素数 c の共役複素数といい、 c^* で表す。

$$c^* = a - ib \quad (\text{B2})$$

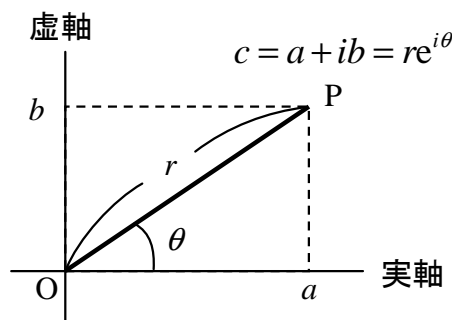


図 B1 複素平面における複素数表示

c の絶対値 $|c|$ は、原点から P 点までの距離で、それを r と書くと、

$$|c| = |c^*| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{B3})$$

実軸(x 軸)と OP のなす角 θ を複素数 c の偏角といい、図より、

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \quad (\text{B4})$$

である。複素数 c は $|c|$ と偏角 θ で表すことができる。(B1)式と図より、

$$c = |c| \cos \theta + i |c| \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{B5})$$

複素数 c で $b = 0$ の場合、 $c = a$ となり、 c は実数になるから、実数は複素数に含まれる。

$a = 0$ の場合は $c = ib$ となり、このとき c は純虚数であるという。

複素数に関する四則演算は実数の場合と同じにしてよい。 $i^2 = -1$ に注意して、

$$\begin{aligned} c_1 \pm c_2 &= (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2) \\ c_1 \cdot c_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ \frac{c_1}{c_2} &= \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - i(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{B7})$$

この公式を使えば、 $a = r \cos \theta$ 、 $b = r \sin \theta$ であるから、複素数 c, c^* は次のようにも書

ける。

$$c = |c|e^{i\theta} = re^{i\theta}, \quad c^* = |c|e^{-i\theta} = re^{-i\theta} \quad (\text{B8})$$

c の実数部、虚数部は c の前にそれぞれ **Re** (*real part*)、**Im** (*imaginary part*) を付けて表す。すなわち、

$$\text{Re } c = a, \quad \text{Im } c = b \quad (\text{B9})$$

それゆえ、

$$c = \text{Re } c + i \text{Im } c \quad (\text{B10})$$

である。また、

$$\text{Re } c = \frac{c + c^*}{2}, \quad \text{Im } c = \frac{c - c^*}{2i} \quad (\text{B11})$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (\text{B12})$$

等も明らかであろう。複素数の掛け算、割り算は

$$c_1 c_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (\text{B13})$$

とも書ける。このように指数関数を使えば、複素数の演算は簡単になる。

電磁波が $\cos(\omega t - kz + \delta)$ 、あるいは $\sin(\omega t - kz + \delta)$ のように時間と場所に対して正弦関数で表せる問題を扱う場合は複素数表示を使うと問題が非常に簡単化される。

電磁波の従う方程式(付録 F マックスウェル方程式参照)は係数が実数で、しかも線型微分方程式なので、 $g_1(\mathbf{r}, t)$ 、 $g_2(\mathbf{r}, t)$ が方程式の2つの解であるとする、

$$\varphi = g_1 + i g_2$$

もまた方程式の解になっている。逆に複素関数 φ がマックスウェル方程式の解ならば **Re** φ 、**Im** φ もまたマックスウェル方程式の解となっている。全ての電磁現象はマックスウェル方程式に従うから、マックスウェル方程式の解として電磁波 **E** が複素数で得られたならば、**Re** **E** または **Im** **E** が実際の電磁波に対応するものとなる。

電磁波が正弦関数で与えられる場合を考えよう。振動数 f で、 z 方向に伝搬する電場、あるいは磁場が次のように表されるとする。

$$A(t, z) = |A_0| \cos(\omega t - kz + \delta) \quad k = \frac{2\pi n}{\lambda} \quad (\text{B14})$$

ここで $\omega = 2\pi f$ は角振動数(ラジアン/s)、 $\lambda = c/f$ は真空中での波長、 n は角振動数 ω における媒質の屈折率である。この場を複素数で

$$A(t, z) = A_0 e^{i(\omega t - kz)}, \quad A_0 = |A_0| e^{i\delta} \quad (\text{B15})$$

で表す。この様に複素数で電磁波を書いたとき、実際の電磁波はいつでもその実数部をとると約束するのである。明らかに(B16)式の実数部は(B14)式になっている。

(B15)式のように電磁場を表すと、場の時間微分や場所の微分が簡単である。

$f(x) = f_0 e^{\beta x}$ を x で微分すると $\frac{df}{dx} = \beta f_0 e^{\beta x} = \beta f$ であるから、

$$\frac{dA}{dt} = i\omega A, \quad \frac{dA}{dz} = -ikA \quad (\text{B16})$$

となり、時間微分は $i\omega$ 、場所での微分は z の係数 $-ik$ を元の関数に掛けてやればよい。

吸収のある媒質中を光が伝搬する場合は、光強度 I は物質表面からの距離を z とすると、

$$I = I_0 e^{-\alpha z} \quad (\text{B17})$$

と書ける(Beer の法則)。ここで α は吸収係数(単位は m^{-1})である。光強度は電場の 2 乗に比例するから電場は次のように表せる。

$$E = E_0 e^{-\frac{\alpha}{2}z} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi n}{\lambda}z + \delta\right) \quad (\text{B18})$$

複素数表示では

$$E = |E_0| e^{-\frac{\alpha}{2}z} e^{i(\omega t - \frac{2\pi n}{\lambda}z + \delta)} = E_0 e^{i(\omega t - \frac{2\pi \hat{n}}{\lambda}z)} \quad (\text{B19})$$

$$\hat{n} = n + i\kappa \quad (\text{複素屈折率}) \quad (\text{B20})$$

この様に屈折率を複素数に置き換えれば、吸収のある場合でも同じ式(B15)で電場を表すことができる。ここで κ は消衰係数といわれ、吸収係数 α とは

$$\alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda} \quad (\text{B21})$$

の関係がある。この様に屈折率にも複素数表示を拡張すると上に述べたように光吸収がある場合も簡単に表すことができる。更に、誘電率 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は屈折率と $\boldsymbol{\varepsilon} = n^2 \boldsymbol{\varepsilon}_0$ の関係があるから(付録 F、(F17)式参照)、誘電率にも複素数表示を拡張し、複素誘電率、複素屈折率をそれぞれ $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{n}$ とすると

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{n}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + i\boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad (\text{B22})$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} &= n^2 - \kappa^2 \\ \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{\boldsymbol{\varepsilon}_0} &= 2n\kappa \end{aligned} \quad (\text{B23})$$

である。複素誘電率 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ の実部、虚部はそれぞれ $\boldsymbol{\varepsilon}$ (誘電率)、 $\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\omega}$ に対応している(付録 F 参照)。

ここで $\boldsymbol{\sigma}$ (電気伝導度)は電流密度と電場を結ぶ量で、電流密度 $\mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}$ で定義される量である。

透明媒質では吸収がないので、 κ, ϵ_2 はゼロになり、 $\hat{n}, \hat{\epsilon}$ は実数になる。

複素数表示をするときの注意

- 1) 電磁場のかけ算は出来ない。例えば、 $\text{Re}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$ は実数表示の $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$ とは一致しない。
- 2) 電磁波のエネルギーの流れ(ポインティングベクトル： $\mathbf{H} \times \mathbf{E}$)、エネルギー密度 $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$ 等のような同じ振動数を持つ場の積の時間平均は次のように、どちらかの複素共役をとり、その2分の1をとればよい。 \overline{A} で時間平均をとる記号とする

$$\overline{A \cdot B} = \frac{1}{2} \text{Re}(A^* \cdot B) = \frac{1}{2} \text{Re}(A \cdot B^*) \quad (\text{B24})$$

- 1) は、 a, b を実数として、 $\omega t - kz = \tau$ とおくと、(B14),(B15)式から実数表示

$$A \cdot B = a \cos(\tau + \delta_a) \cdot b \cos(\tau + \delta_b) = ab \cos(\tau + \delta_a) \cdot \cos(\tau + \delta_b)$$

複素数表示

$$\text{Re}(A \cdot B) = \text{Re}(a e^{i(\tau + \delta_a)} \cdot b e^{i(\tau + \delta_b)}) = ab \cos(2\tau + \delta_a + \delta_b)$$

となり、実数表示と複素数表示は一致しない。

- 2) は、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ とし、1周期にわたって時間平均をとると、実数表示では

$$\begin{aligned} \overline{A \cdot B} &= \frac{1}{T} \int_0^T a \cos(\tau + \delta_a) b \cos(\tau + \delta_b) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T ab (\cos \tau \cos \delta_a - \sin \tau \sin \delta_a) (\cos \tau \cos \delta_b - \sin \tau \sin \delta_b) dt \\ &= \frac{1}{T} ab \int_0^T (\cos^2 \tau \cos \delta_a \cos \delta_b + \sin^2 \tau \sin \delta_a \sin \delta_b) dt \\ &= \frac{ab}{2} (\cos \delta_a \cos \delta_b + \sin \delta_a \sin \delta_b) = \frac{ab}{2} \cos(\delta_a - \delta_b) \end{aligned}$$

ここで、三角関数の公式(付録 A (A12)、および(A9)式)を用い、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \cdot \sin \omega t dt &= \frac{1}{T} \int \frac{1}{2} \sin 2\omega t dt = 0 \end{aligned}$$

などを使った。

複素数表示では片方だけ共役複素数をとると、

$$\frac{1}{2} \text{Re}(A^* \cdot B) = \frac{1}{2} \text{Re}(a e^{-i(\tau + \delta_a)} \cdot b e^{i(\tau + \delta_b)}) = \frac{ab}{2} \cos(\delta_b - \delta_a)$$

となり、実数表示と一致する。

付録C ベクトル

X軸、Y軸、Z軸の正の向きで大きさが1のベクトル(単位ベクトル)を $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とすると、成分が A_x, A_y, A_z のベクトル \mathbf{A} は

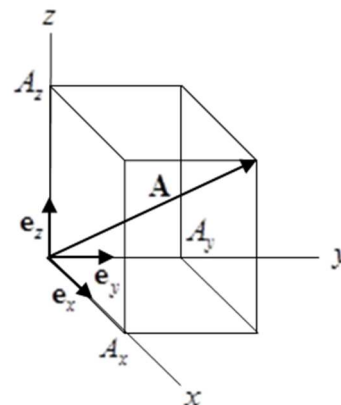
$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z = (A_x, A_y, A_z) \quad (\text{C1})$$

と表わされる。この表示法を単位ベクトルに用いれば、各単位ベクトルは、

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_y = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) \quad (\text{C2})$$

となる。ベクトル \mathbf{A} の大きさは次のようになる。

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (\text{C3})$$



図C1 三次元直交座標系とベクトル

ベクトルの掛け算

2つのベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} の掛け算には2種類ある。

スカラー積(内積) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (\text{C4})$$

この定義から、

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1, \quad i = x, y, z, \quad (\text{C5})$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \quad (\text{C6})$$

\mathbf{A}, \mathbf{B} が作る平面をxy平面にとり、x軸を \mathbf{A} の向きにとると、

$$\mathbf{A} = A \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{B} = B \cos \theta \mathbf{e}_x + B \sin \theta \mathbf{e}_y$$

これより

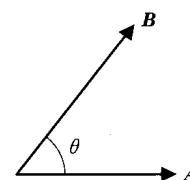
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (\text{C7})$$

と書くこともできる。

$\mathbf{A} \neq 0, \mathbf{B} \neq 0$, かつ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ となるのは \mathbf{A} と \mathbf{B} が直交しているときである。

ベクトル積(外積) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \quad (\text{C8})$$



図C2 2つのベクトル

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (\text{C9})$$

最後の式は行列式で、第1行について展開すると(C5)式が得られる(行列、行列式については次ページの付録F参照)。定義から次式が得られる。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (\text{C10})$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{0}, \quad i = x, y, z \quad (\text{C11})$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (\text{C12})$$

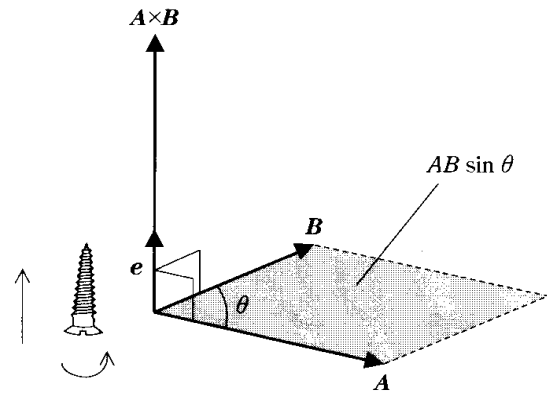


図 C3 ベクトル積

ベクトル積を図示したのが図 C3 である。ベクトル積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ はベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} が作る平面に垂直で、向きは \mathbf{A} から \mathbf{B} へ右ねじを回転させたとき、ねじが進む向きである。また、ベクトル積の大きさは \mathbf{A}, \mathbf{B} の作る平行四辺形の面積に等しい。図から明らかなように $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, であつ $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ となるのは \mathbf{A} と \mathbf{B} が平行のときである。 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ はスカラー量、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ はベクトル量であることに注意。

次式が成り立つ。

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\text{C13})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{C14})$$

付録D 行列と行列式

m 行 n 列の行列 \tilde{A} (特に行数と列数を強調したいときは (m, n) 行列 \tilde{A} と記す)は $m \cdot n$ 個の数 a_{ik} ($i=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, n$)を次のように長方形に配列したものである。ここで a_{ik} を行列の元素という。

$$\tilde{A} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{D1})$$

この行列を簡単に表すのにここでは文字の上に波を付けた \tilde{A} で表すことにする。また、行列の元素を使って

$$\tilde{A} = [a_{ik}] \quad (\text{D2})$$

等と記すこともある。行列 \tilde{A} において、上から数えて第 i 番目の行を第 i 行といい、左から数えて第 k 番目の列を第 k 列という。第 i 行、第 k 列の元素を a_{ik} と書くのである。例えば、左図の行列で第2行第3列の元素 a_{23} は2である。

行と列の数が等しい行列を正方行列といい、その行数(あるいは列数) n をその正方行列の次数という。

行、または列の数が1である行列をベクトルという。これはこれまでも特に断らずに使ってきた。すなわち、

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (\text{D3})$$

などである。

行列の和

ともに m 行 n 列の行列 \tilde{A}, \tilde{B} の和は

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \cdots \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & & \\ a_{31} + b_{31} & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \quad (\text{D4})$$

で定義される。すなわち、各々の行列の同行、同列の元素の和をとるのである。それ故、下記のように書いてもよい。

	第 1 列	第 2 列	第 3 列
	↓	↓	↓
第1行→	2	3	8
第2行→	-1	6	2
第3行→	7	-5	1

$$\tilde{A} + \tilde{B} = [a_{ik} + b_{ik}] \quad (\text{D5})$$

行列の元素をすべて c 倍 (c は数) したものを元素とする行列を c と \tilde{A} とのスカラ乗積といい、これを $c\tilde{A}$ とかく。例えば、3行3列の行列ならば、

$$c\tilde{A} = [ca_{ik}] = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{D6})$$

行列の積： \tilde{A} を (m, n) 行列、 \tilde{B} を (n, l) 行列とした時、行列の積 $\tilde{A}\tilde{B}$ は

$$\tilde{A}\tilde{B} = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right] \quad (\text{D7})$$

で定義する。すなわち、積 $\tilde{A}\tilde{B}$ の (i, k) 元素は行列 \tilde{A} の第 i 行の元素と行列 \tilde{B} の第 k 列の元素とを番号順に掛け合わせたものの和である。この積の定義から明らかのように \tilde{A} の列の数と \tilde{B} の行の数は同数でなければならない。この場合は n がその数である。なお、2つの行列が同じ次数の正方行列であっても一般には $\tilde{A}\tilde{B} \neq \tilde{B}\tilde{A}$ であり、掛け算の順序は重要である。単位行列：

n 次正方行列の左上から右下への対角線上にある元素 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を対角元素といい、対角元素以外の元素がすべて 0 であるような行列を対角行列という。さらに、対角行列でかつ対角行列の元素がすべて 1 である行列を単位行列という。単位行列は \tilde{E} で表すことにする。二次、三次単位行列は次のようになる。

$$\text{二次単位行列： } \tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{三次単位行列： } \tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D8})$$

\tilde{A} を n 次行列、 \tilde{E} を n 次単位行列とすると、次式が成り立つ。

$$\tilde{A}\tilde{E} = \tilde{E}\tilde{A} = \tilde{A} \quad (\text{D9})$$

逆行列：

$$\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{E}$$

を満足する行列 \tilde{X} を行列 \tilde{A} の逆行列といい、 \tilde{A}^{-1} と書く。

$$\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = \tilde{E} \quad (\text{D10})$$

上の式に左から \tilde{A}^{-1} を掛けると右辺は \tilde{A}^{-1} となり、左辺は

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = (\tilde{A}^{-1}\tilde{A})\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1} \quad \therefore \tilde{A}^{-1}\tilde{A} = \tilde{E} \quad (\text{D11})$$

この結果から、 \tilde{A}^{-1} の逆行列は \tilde{A} であることがわかる。また、(D10),(D11)式から、行列にその逆行列を左から掛けても、右から掛けても単位行列が得られることも分かる。

行列式

行列式は次の形で書く、

$$\left| \tilde{A} \right| \quad \text{または} \quad \left| a_{ik} \right| \quad \text{または} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (\text{D12})$$

いずれも同じ意味で使う。n次行列の行列式をn次行列式という。本書では2次と3次の行列式のみを扱うので、その表示は簡単である。

n=2の場合

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{D13})$$

である。左上から右下への対角元素の積 $a_{11}a_{22}$ と右上から左下への元素の積 $a_{12}a_{21}$ の符号を変えたものの和である。

n=3の場合

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - (a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}) \quad (\text{D14})$$

である。3次の場合は図のように左上から右下への3つの元素の積はそのままの符号で、右上から左下への3つの元素の積はマイナス符号をつけて加えたものである。

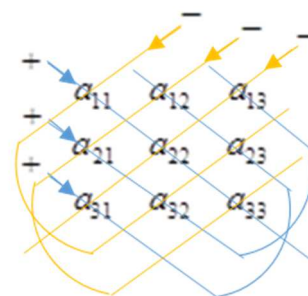
クラマー(Cramer)の公式

連立一次方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (\text{D15})$$

この連立1次方程式は行列の積として表せる。紙面のスペース上、3行1列のベクトルを $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と書けば、(D15)式は

$$\tilde{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{D16})$$



図D1 3次行列式の覚え方

とも表せる。

この方程式は $|\tilde{A}| \neq 0$ のとき、ただ 1 つの解を持ち、その解は

$$x_k = \frac{|\tilde{A}_k|}{|\tilde{A}|}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{D17})$$

で与えられる。ただし、行列 \tilde{A}_k は行列 \tilde{A} の第 k 列の元素 a_{ik} を b_i で置き換えた行列である (Cramer の公式)。

この公式から次のことが言える。同次連立一次方程式(すなわち、 $b_i = 0, i = 1, 2, 3$ のとき)では行列 \tilde{A}_k の第 k 列がすべて 0 なので、行列式 $|\tilde{A}_k| = 0$ となる。これにより $|\tilde{A}| \neq 0$ ならば x_k は全て 0 になる。逆に 0 以外の解があるための条件は $|\tilde{A}| = 0$ である。

固有(電場)ベクトルの直交性

行列要素間に $a_{ik} = (a_{ki})^*$ の関係がある行列をエルミート行列という。この定義によりエルミート行列は正方行列である。また、エルミート行列の対角元素 a_{ii} は実数である。3 次のエルミート行列を具体的に書くと、 b_{ik}, c_{ik} を実数として

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} + ic_{12} & b_{13} + ic_{13} \\ b_{12} - ic_{12} & b_{22} & b_{23} + ic_{23} \\ b_{13} - ic_{13} & b_{23} - ic_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{D18})$$

である。エルミート行列の例としては誘電率テンソル $\tilde{\epsilon}$ (第 5 章(5.7)式)、屈折率に関する行列(第 5 章、(5.21)式の係数)や磁場が印加された場合の誘電率(第 8 章、(8.54)式)などがその例である。

エルミート行列 $\tilde{A} = [a_{ik}]$ に対して

$$\tilde{A}\mathbf{x} = \lambda\tilde{E}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (\text{D19})$$

を満足する数 λ 及び列ベクトル $\mathbf{x} \neq 0$ が存在するとき、 λ を \tilde{A} の固有値、 \mathbf{x} を固有値 λ に対する固有ベクトルという。なお、(D19)式で右辺の $\lambda\tilde{E}\mathbf{x}$ では \tilde{E} を省略して $\lambda\mathbf{x}$ と書くことが多い。本書でもこの記法に従っている。行列 \tilde{A} が誘電率テンソル $\tilde{\epsilon}$ の場合、固有値は $\lambda = \epsilon_i = \epsilon_0 n_i^2$ で、この屈折率 n_i に対する固有ベクトルが固有電場ベクトル \mathbf{E}_i であった。3 個の固有電場ベクトルの方向を新座標軸に選ぶと、その新座標系では $\tilde{\epsilon}$ は対角元素のみになり、(5.18)式になる。

ベクトル \mathbf{x} を行列に左から掛けるときは、ベクトル \mathbf{x} は 1 行 n 列の行ベクトルとする。ベクトル \mathbf{x} の大きさは、この記述法によれば、

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x} \quad (\text{D20})$$

と書ける。さて、行列 \tilde{A} がエルミート行列で、(D19)式が成り立つとき、エルミート行列の定義により元素間に $a_{ik} = (a_{ki})^*$ の関係があるから、

$$\mathbf{x}\tilde{A}^* = \lambda\mathbf{x}E = \lambda\mathbf{x} \quad (\text{D21})$$

両辺の複素共役をとり、右から \mathbf{x} をかけると、 $(\tilde{A}^*)^* = \tilde{A}$ だから

$$(\mathbf{x}\tilde{A}^*)^* \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \tilde{A} \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^* \mathbf{x} = \lambda^* \mathbf{x}^* \mathbf{x} \quad (\text{D22})$$

右辺最後の式は(D21)式の右辺 $(\lambda\mathbf{x})^*$ に \mathbf{x} をかけたものである。これより、 $\lambda^* = \lambda$ であるから、**エルミート行列の固有値は実数である**ことがわかる。

固有値 λ_i に対応する固有ベクトルを \mathbf{x}_i ($i=1,2,3$) とする(\mathbf{x}_i は \mathbf{x} の i 成分ではなく、ベクトル \mathbf{x} を区別するための添え字である。 \mathbf{x}_i と x_i との違いに注意)。 (D19)式や(D21)式を使うと、 $\lambda_j \neq \lambda_k$ のとき

$$(\lambda_j - \lambda_k)\mathbf{x}_j^* \mathbf{x}_k = \lambda_j \mathbf{x}_j^* \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j^* \lambda_k \mathbf{x}_k = (\mathbf{x}_j \tilde{A}^*)^* \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j^* \tilde{A} \mathbf{x}_k = 0$$

ここで $(\tilde{A}^*)^* = \tilde{A}$ を使った。上の式より、**違った固有値を持つ固有ベクトルは直交すると**結論される。すなわち、

$$\mathbf{x}_j^* \mathbf{x}_k = 0 \quad \lambda_j \neq \lambda_k \quad (\text{D23})$$

屈折率と電場を求める第 5 章の(5.21)式は上で述べてきた事柄がそのまま適用できる。(5.21)式を解いて得られる固有値(屈折率 n_i^2)に対応する固有電場ベクトル \mathbf{E}_i は互いに直交することが結論される。(5.28)式で与えられる電場で、 $n = n_i$ ($i=1,2,3$) と置いて得られる電場は互いに直交するのである。