

偏光 (No. 5)

栗田 進

4.3 屈折率の異方性

前回では光を伝える媒質が立方対称性を持つか、ガラスや液体のように均一な場合について考察した。ここでは媒質が立方対称性を持たない場合、屈折率（誘電率）は方向によって異なる、いわゆる、異方性を持つことを示す。

異方性が起こる理由を考えるのが目的であるので、きわめて単純化したモデルでこれを示す。図のように z 方向には b の間隔で、 x 方向には a の間隔で同一原子が並んでいる格子のなかで、中心原子 P を囲む 4 個の原子のみを考える。それら 4 個の原子が中心原子に及ぼす電場が外部電場の方向によって異なること、すなわち、局所場の大きさが、外部電場の方向によって異なることを示すことによって誘電率(屈折率)の異方性を示す。

光による電場 \mathbf{E} がかかったとき、原子には電気双極子モーメント \mathbf{m} が誘起される。これらの双極子が中心原子 P につくる電場を求める。この電場と外部から印加した電場 \mathbf{E} によって双極子モーメントは発生するのであるが、ここでは外部電場によって双極子が発生し、その双極子による局所場は二次の効果として原子分極にはたらくとする。これ

は外部電場に比べて原子分極によって発生する電場が小さいとする近似である。

電気双極子が \mathbf{r} 離れた点に作る電場は前回の式(4.7)で述べたように、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{4\pi\epsilon_0 r^5} \quad (4.7)'$$

と書ける。双極子を含む面内で、双極子から半径 R の円上の点における電場をベクトルで表したのが図 2 である。双極子の延長線上にある上下の 2 点の電場の大きさは、(4.7)' から $\frac{2m}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ 、

双極子に垂直な、左右の 2 点では $\frac{m}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ となり、延長線上の電場の半分で向きは反対である。

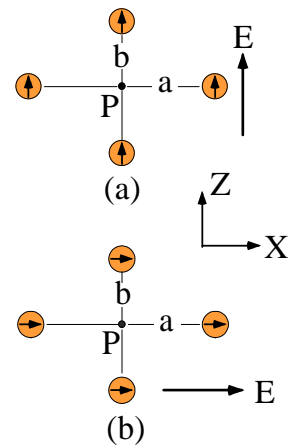


図 5-1 原子分極が P 点につくる電場は外部電場の向きによって異なる。

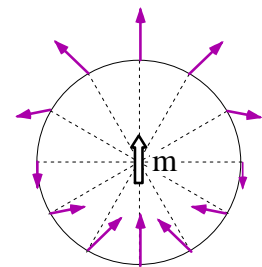


図 5-2 双極子モーメントが球面上につくる電場

図 1(a) の z 軸上にある 2 つの双極子が P 点に作る電場は z 方向で大きさ $\frac{2m}{4\pi\epsilon_0 b^3} \times 2$ 、 x 軸上にある 2 つの双極子が作る電場は z のマイナス方向で $\frac{m}{4\pi\epsilon_0 a^3} \times 2$ となるので、4 個の双極子が中心原子に作用する電場は外部電場 \mathbf{E} と同じ方向で、

$$E_{z0} = \frac{m}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{b^3} - \frac{2}{a^3} \right) \quad (4.24)$$

である。中心原子はこの電場と外部電場によって分極を起こす。

x 方向に外部電場をかけた場合 (図 1(b)) についても (a) と同様に計算すると、4 個の双極子から受ける電場はやはり外部電場と同じ方向で、

$$E_{x0} = \frac{m}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{a^3} - \frac{2}{b^3} \right) \quad (4.25)$$

となる。

いま、 $b < a$ 、すなわち、 z 軸方向により密に原子が配列しているとする、

$$E_{z0} > E_{x0} \quad \text{ただし、} b < a \quad (4.26)$$

となる。外部から z 方向に電場をかけた場合の方が、 x 方向にかけた場合よりも、原子が感ずる局所場は大きくなり、誘起される原子電気双極子も大きくなる。結果としてこれらの原子分極の和である分極 \mathbf{P} も大きくなる。

$$\mathbf{D}_z = \epsilon_0 \mathbf{E}_z + \mathbf{P}_z = \epsilon_z \mathbf{E}_z \quad \mathbf{D}_x = \epsilon_x \mathbf{E}_x \quad (4.27)$$

で定義される z 方向に電場が印加された場合の誘電率 $\epsilon_z (= n_z^2 \epsilon_0)$ が ϵ_x よりも大きくなり、

誘電率、あるいは屈折率に異方性が生じるのである。

次に単斜晶系や三斜晶系の結晶に見られるような、原子が z 軸から γ だけずれている場合を考えてみよう (図 3)。図 1 のモデルと同様に中心原子 P の周りの 4 個の原子が P 点に作る電場を考える。 z 方向に電場がかかった場合、 z 軸から γ だけずれた上下の原子分極が P 点につくる電場は図 2 のほぼ同じ角度ずれた点の電場であるから、電場はほぼ両点を結ぶ方向にあつて、 z 方向からはずれている。すなわち、外部電場が z 方向にかかったとき、原子分極によって発生する P 点における電場は x 成分を持っている。一方、図 3 の a だけ離れてある原子分極がつくる電場は図 1 の場合と同じく、 z のマイナス方向を向いている。このことから外部電場が z 方向にかかったとき、P 点にある原子が感ずる局所場は z 成分ばかりでなく、 x 成分も持つ。それ故、その局所場によって誘起される原子分極も x 成分

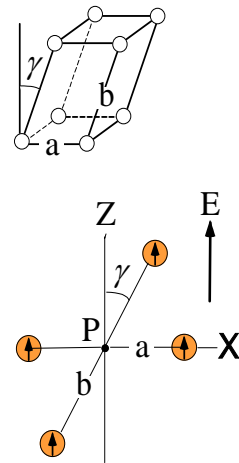


図 5-3 原子が z 軸からずれた点にある場合に原子分極が P 点につくる電場

を持つのでそれらの和である電気分極 \mathbf{P} も x 成分を持つことになり、

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

で定義される電気変位 \mathbf{D} は外部電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_z$ に対して \mathbf{D}_x を持つ。分極 \mathbf{P} は外部電場に比例するので、 D_x は E_z に比例する。式で書けば、 $D_x = \varepsilon_{xz} E_z$ となる。一般には、 y 方向についても同じことが起こるので、

$$D_x = \varepsilon_{xz} E_z, \quad D_y = \varepsilon_{yz} E_z, \quad D_z = \varepsilon_{zz} E_z \quad (4.28)$$

のようになる。

これまでは格子を構成する粒子として方向性を持たない原子を考えてきたが、一般には、物質は異方性を持つ分子を基本粒子として構成されているので分極 \mathbf{P} も外部電場 \mathbf{E} の方向によって違った値と方向を持つ。 \mathbf{E} を任意の方向を取ると、 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ に対して

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z \end{aligned} \quad (4.29)$$

のようになり、誘電率 ε はテンソル量 $\tilde{\varepsilon}$ で、**9** 個の定数(実際は同じ値をとるものがあるので最大でも **6** 個である)で表される。しかし、結晶に対して適当な座標軸を選ぶと (29) で表される誘電率はいつでも **3** つの定数 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ で、

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_x E_x \\ D_y &= \varepsilon_y E_y \\ D_z &= \varepsilon_z E_z \end{aligned} \quad (4.30)$$

と表すことができる。誘電率(屈折率)の異方性と偏光については次回の結晶光学の項で述べる。

4.4 屈折率の分散 (ローレンツ模型)

屈折率、あるいは誘電率が光の振動数 (波長) によってその値が変わることを**分散がある**という。この分散の原因は原子分極の大きさが振動数に依存することによる。ここで分散について考えてみよう。

前回(No.4)の図 4-1 で示したように外部電場がかかると電子系の中心は正電荷の位置からずれる。原子をモデルとして考えれば、原子殻は重いので動かないとすると平衡からずれるのは電子であり、そのずれをここでは \mathbf{r} で表すことにする。外場に対する原子の応答は $q\mathbf{r}$ の電気双極子で表される。 q は電子の電荷量である。

質量 m 、電荷 q の粒子（電子）が平衡点から \mathbf{r} ずれたとき、もし外部電場がなければ平衡点に戻るはずであるから、平衡点からずれると平衡点に戻ろうとする力（復元力という）がはたらく。復元力はずれが大きければそれだけ大きくなるはずであるから、ずれの大きさに比例する。この力を $-m\omega_0^2\mathbf{r}$ とする。復元力の比例定数を $m\omega_0^2$ とおいたのは計算に便利であるからであるが、このように置くと双極子が固有振動数 ω_0 で振動していることを示している。運動方程式（質量×加速度＝物体にかかる力）から、電子のずれ \mathbf{r} に対して次式が成り立つ。

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - m\Gamma\frac{d\mathbf{r}}{dt} + q\mathbf{E}_{loc} \quad (4-31)$$

ここで、右辺第2項は電子が周囲から受ける摩擦力で、それは電子の速度に比例するとした。 Γ は比例定数である。第3項は光の電場から電子が受ける力で、その電場は原子が受ける局所場 \mathbf{E}_{loc} なので前項で述べたように光の電場と原子が分極したことによって発生した電場との和である。

光の波長に比べて原子の大きさや格子間隔は小さい。例えば、可視光の波長 500nm （青緑）に対して原子の大きさは $0.1\sim 1\text{nm}$ 、格子間隔（格子定数）もせいぜい 1nm のオーダーである。この様な波長の光では原子は場所に寄らない様な電場として良いので、外部電場を

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (4-32)$$

荷電粒子はこの電場によって強制振動させられるから、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$$

とおける（電場などの複素数表示については付録参照）。これ以外の項は摩擦項のために時間の経過と共に減衰してしまう。これらを(31)に代入して \mathbf{r} について解くと、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} = \frac{q\mathbf{E}_{loc}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)} \quad (4.33)$$

電場のために平衡点からずれた量が \mathbf{r} であるから $q\mathbf{r} = \mathbf{m}$ が電場によって誘起された原子分極となる。

原子分極率 α はこの電気双極子と \mathbf{E}_{loc} を結ぶ量で式(4.17)、すなわち、

$$\mathbf{m} = \alpha\mathbf{E}_{loc}$$

であるから、

$$\alpha = \frac{q^2}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)}$$

固有振動数は一つしか存在しないとしてきたが、一般には一つの原子、あるいは分子にも

多くの固有振動がある。その固有振動数を ω_k とすると、

$$\alpha = \frac{q^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\Gamma_k \omega} \quad (4.34)$$

f_k は固有振動数 ω_k を持つ振動電子が原子分極に寄与する割合を示すもので、単位体積中に N 個の電子があるとすれば、 $N f_k$ は固有振動数 ω_k を持つ電子数と解釈される。 f_k は振動子強度とよばれ、定義から

$$\sum_k f_k = 1 \quad (4.35)$$

となるが、実際、この等式が成り立つことは量子論で証明されている。

「量子論では固有振動数 ω_k は電子のエネルギー準位間のエネルギー差 $\omega_{ij} = (E_i - E_j)\hbar^{-1}$ に対応している。この遷移が光子の吸収で起こるとき、光の吸収率

は f_k 、ここでは f_{ij} と書くべきだが、に比例する。また、 ω_k は飛び飛びの値と考えてきたが、半導体などのように電子のエネルギー準位が連続的に広がっている場合（バンド）には ω_k はバンド間遷移エネルギーになり、連続的な値をとる。光学材料になるような物質では電子の固有振動は可視や紫外領域にある。分子振動や結晶の格子振動の固有振動は赤外領域にあるが、この様な振動に対しても(35)は適用できる。そのときは当然、 q, m は電子のそれとは違った値になる。しかし、分子振動や格子振動は質量が大きいのので可視光のような速い振動にはついて行けないのでこの様な振動数の光に対しては分子振動や格子振動は無視して良い。

以上のような読み替えを行えば、ここで扱っている古典的な双極子モデルによる現象論で得られる結果は量子論で得られる結果と同じである。」

分母の虚数項について： この項は(31)で指摘したように摩擦による項である。それは電磁波のエネルギーがジュール熱となって消滅する項で、光の吸収に相当する項である。吸収のない、透明領域に話を限るのであれば、この項は小さいとして無視することができる。以下では $\Gamma = 0$ として吸収項を無視する。

原子分極率 α と屈折率とは Lorentz-Lorenz の公式 (No.4 式(4.21)) によって次のような関係になっている。

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{N}{3\epsilon_0} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (4.36)$$

希薄な媒質で $n \approx 1$ のとき、

$$n^2 - 1 = \frac{N}{\epsilon_0} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (4.37)$$

n が 1 に近似できない、密な物質でも以下のようにすれば似た式が得られる。(36)の初めの等式から

$$n^2 - 1 = \frac{3N\alpha}{3\varepsilon_0 - N\alpha} \quad (4.38)$$

が得られる。ここで、 α が $(\omega_k^2 - \omega^2)^{-1}$ の形の項の和となっているので、 $(n^2 - 1)$ は $(\bar{\omega}_k^2 - \omega^2)^{-1}$ の形に展開できるであろう。

$$n^2 - 1 = \sum_k \frac{\rho_k}{\bar{\omega}_k^2 - \omega^2} \quad (4.39)$$

この式は $\omega = \bar{\omega}_k$ で発散するから、この値で(38)の分母が 0 になるはずである。すなわち、 $\bar{\omega}_k$ を

$$3\varepsilon_0 - N\alpha = 3\varepsilon_0 - N \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2} = 0$$

の解にとれば、(39)の展開がえられる。ただし、(37)とは異なり、 $\bar{\omega}_k$ の物理的意味は薄れる。すぐ後で示すように、 ρ_k 、 $\bar{\omega}_k$ はパラメータとして扱われ、実験結果に合うように選ばれるのが普通である。

結論：屈折率の分散は(37)あるいは(39)であらわされる。

(37)、(39)をもう少し使い易い近似式が幾つか提案されている。その一例を示す。

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \text{ であるから}$$

$$\frac{\rho_k}{\omega_k^2 - \omega^2} = \frac{\lambda^2 \lambda_k^2 \rho_{k0}}{\lambda^2 - \lambda_k^2} = \lambda_k^2 \rho_{k0} \left(1 + \frac{\lambda_k^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \right) \equiv a_k + \frac{b_k}{\lambda^2 - \lambda_k^2}$$

λ_k が紫外域にある場合で、可視光領域を主に問題にする場合には他の共鳴波長 λ_k の項をまとめて A とおくと

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \quad (4.40)$$

と近似できる。(37)、(39)、(40)式は **Sellmeir の分散式** とよばれている。 A 、 B 、 λ_0 はパラメータで、いくつかの波長で屈折率が求まっているとき、他の波長での屈折率を推定するのに用いられる。なお、この他にも(39)を元にいろいろな近似式が提案されている。

Sellmeir の分散式の例として、二酸化チタン (TiO_2 、ルチル形) の透明領域($0.4 \sim 1.5 \mu\text{m}$)の屈折率を示す。 $E \perp c$ ($E // c$) 偏光の屈折率 n_{\perp} ($n_{//}$) は次式で ± 0.004 の範囲で実測値と一致している。¹⁾

$$n_{\perp}^2 = 5.913 + \frac{0.2441}{\lambda^2 - 0.2834^2}$$

$$n_{\parallel}^2 = 7.197 + \frac{0.3322}{\lambda^2 - 0.2904^2}$$
(4.41)

波長 λ の単位は μm である。この式では共鳴吸収は **280~290nm** の紫外域にある。実際反射測定からは **300nm** にピークを持つ吸収帯が得られている。²⁾

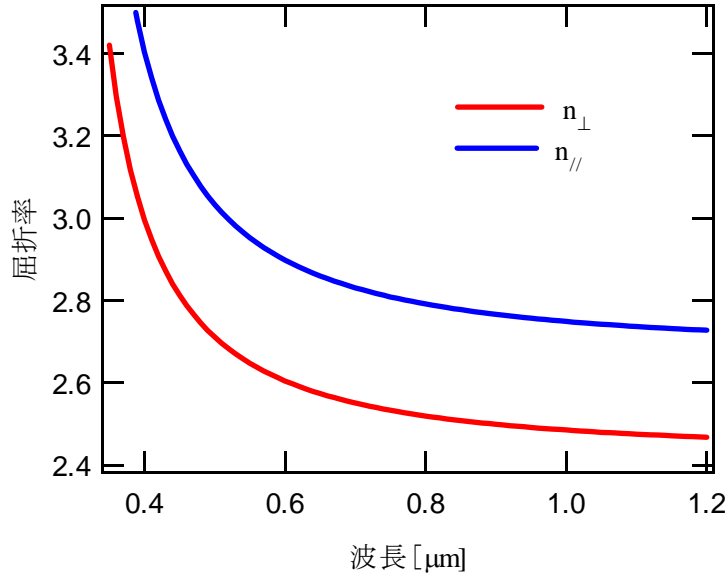


図 5.4 二酸化チタン (TiO₂ ルチル) の屈折率。Sellmeier の分散式(41)で与えられる屈折率(図)は ± 0.004 の範囲で測定値と一致している(0.4~1.5 μm)。 n_{\perp} (n_{\parallel})は c 軸に垂直(平行)偏光に対する屈折率である。

- 1) J. R. Devore, J. Opt. Soc. Am., **41**, 416 (1951)
- 2) K. Vos and H.J. Krusemeyer, J. Phys. C, **10**, 3893 (1977)

付録：電磁波の複素数表示

電磁波が $\cos(\frac{2\pi n}{\lambda_0} z - \omega t)$ 、あるいは $\sin(\frac{2\pi n}{\lambda_0} z - \omega t)$ のように時間と場所に対して正弦関数で表せる問題を扱う場合は複素数表示を使うと問題が非常に簡単化される。

複素数 C は a, b を実数、 $i = \sqrt{-1}$ としたとき、

$$C = a + ib \tag{A1}$$

で表される。横軸を実数、縦軸を虚数軸にとる複素平面でこの複素数を図示すると図5のようになる。複素数の i を

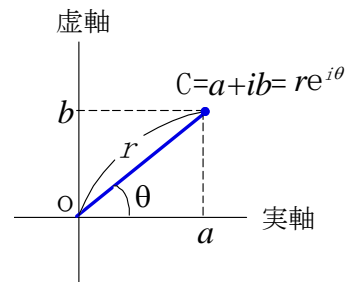


図 5.5 複素平面による複素数の表示

$-i$ に変えた数を複素数 C の共役複素数といい、 C^* で表す。

$$C^* = a - ib \quad (\text{A2})$$

C の絶対値は原点から C 点までの距離で、それを $|C|$ と書く。

$$|C| = |C^*| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{A3})$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の関係があるので、この関係を使うと、図から

$$C = |C|e^{i\theta}, \quad C^* = |C|e^{-i\theta} \quad (\text{A4})$$

と書くこともできる。

C の実数部、虚数部は C の前にそれぞれ Re (*real part*)、 Im (*imaginary part*) を付けて表す。すなわち、

$$\text{Re} C = a, \quad \text{Im} C = b \quad (\text{A5})$$

電磁波の従う方程式 (**Maxwell** 方程式、末尾参照) は係数が実数でしかも線型微分方程式であるので、 $f(\mathbf{r}, t)$ 、 $g(\mathbf{r}, t)$ がこの方程式の2つの解であるとする、

$$\varphi = f + ig$$

もまた方程式の解になっている。逆に複素関数 φ が **Maxwell** 方程式の解ならば $\text{Re} \varphi$ 、 $\text{Im} \varphi$ もまた **Maxwell** 方程式の解となっている。全ての電磁現象は **Maxwell** 方程式に従うから、**Maxwell** 方程式の解として電磁波 \mathbf{E} が複素数で得られたならば、 $\text{Re} \mathbf{E}$ または $\text{Im} \mathbf{E}$ が実在する電磁波に対応するものとなる。

電磁波が正弦関数で与えられる場合を考えよう。電場、あるいは磁場が次のように表されるとする。

$$a(t, z) = |A_0| \cos(\phi + \delta) \quad (\text{A6})$$

$$\text{但し、} \quad \phi = \frac{2\pi n}{\lambda_0} z - \omega t \quad (\text{A7})$$

ここで $\omega = 2\pi\nu$ は角振動数 (ラジアン)、 λ_0, n は真空中での波長とその波長における屈折率である。この場を複素数で

$$A(t, z) = A_0 e^{i\phi}, \quad A_0 = |A_0| e^{i\delta} \quad (\text{A8})$$

と表す。この様に複素数で電磁波を書いたとき、実際の電磁波はいつでもその実数部をとると約束するのである。明らかに (A8) の実数部は (A6) になっている。

(A8) のように電磁場を表すと、時間や場所の微分が簡単である。 $f(x) = f_0 e^{\beta x}$ を x で

微分すると $\frac{df}{dx} = \beta f_0 e^{\beta x} = \beta f$ であるから、

$$\frac{dA}{dt} = -i\omega A, \quad \frac{dA}{dz} = i \frac{2\pi n}{\lambda_0} A$$

となり、時間微分は $-i\omega$ 、場所での微分は z の係数 $i \frac{2\pi n}{\lambda_0}$ を元の関数に掛けてやればよい。

吸収のある物質中を光が伝搬する場合は、光強度 I は物質表面からの距離を z とすると、

$$I = I_0 e^{-\alpha z} \quad (\text{A9})$$

と書ける (**Beer** の法則)。ここで α は吸収係数 (単位は m^{-1}) である。光強度は電場の2乗に比例するから、吸収のある媒質中を進行する光の電場は次のように表せる。

$$E = E_0 e^{-\frac{\alpha}{2} z} \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} z - \omega t + \delta\right) \quad (\text{A10})$$

複素数表示では

$$E = E_0 e^{-\frac{\alpha}{2} z} e^{i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} z - \omega t\right)} = E_0 e^{i\left(\frac{2\pi \tilde{n}}{\lambda_0} z - \omega t\right)} \quad (\text{A11})$$

$$\tilde{n} = n + i\kappa \quad (\text{複素屈折率}) \quad \#) \quad (\text{A12})$$

この様に屈折率を複素数に置き換えれば、吸収のある場合でも同じ式(A8)で電場を表すことができる。ここで κ は消衰係数といわれ、吸収係数 α とは

$$\alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda_0} \quad (\text{A13})$$

の関係がある。この様に屈折率にも複素数表示を拡張すると上に述べたように光吸収がある場合も簡単に表すことができる。更に、誘電率 ϵ は屈折率と $n^2 \epsilon_0$ の関係があるから、誘電率にも複素数表示を拡張すれば、

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{n}^2 \epsilon_0 = \epsilon_1 + i\epsilon_2 \quad (\text{A14})$$

となる。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= (n^2 - \kappa^2) \epsilon_0 \\ \epsilon_2 &= 2n\kappa \epsilon_0 \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

#) 同じ電場を $\cos(\omega t - qz + \delta)$ と表すことも出来る。この場合は $\tilde{n} = n - i\kappa$ 、 $\tilde{\epsilon} = \epsilon_1 - i\epsilon_2$ となり、また、円偏光などの表示も変わるので注意が必要である。ここでは位相を $(qz - \omega t)$ にとることとする。

である。複素誘電率 $\tilde{\epsilon}$ の実部、虚部はそれぞれ ϵ 、(誘電率)、 $\frac{\sigma}{\omega}$ に対応している。ここで σ (電気伝導度) は電流密度と電場を結ぶ量で、電流密度 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ で定義される量である。透明物質では吸収がないので、 κ, ϵ_2 はゼロになり、 $\tilde{n}, \tilde{\epsilon}$ は実数になる。

複素数表示をするときの注意

- 1) 電磁場のかけ算は出来ない。例えば、 $\mathbf{Re}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$ は実数表示の $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$ とは一致しない。
- 2) 電磁波のエネルギーの流れ (ポインティングベクトル: $\mathbf{H} \times \mathbf{E}$)、エネルギー密度 $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$ 等のような同じ振動数を持つ場の積の時間平均は次のように、どちらかの複素共役をとり、その2分の1をとればよい。

$$\overline{A \cdot B} = \frac{1}{2} \text{Re}(A^* \cdot B) = \frac{1}{2} \text{Re}(A \cdot B^*)$$

- 1) は、 a, b を実数として、

実数表示

$$A \cdot B = a \cos(\phi + \delta_a) \cdot b \cos(\phi + \delta_b) = ab \cos(\phi + \delta_a) \cdot \cos(\phi + \delta_b)$$

複素数表示

$$\text{Re}(A \cdot B) = \text{Re}(a e^{i(\phi + \delta_a)} \cdot b e^{i(\phi + \delta_b)}) = ab \cos(2\phi + \delta_a + \delta_b)$$

となり、実数表示と複素数表示は一致しない。

- 2) は、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ とし、1周期にわたって時間平均をとると、実数表示では

$$\overline{A \cdot B} = \frac{1}{T} \int_0^T a \cos(\phi + \delta_a) b \cos(\phi + \delta_b) dt = \frac{ab}{2} \cos(\delta_a - \delta_b)$$

複素数表示では片方だけ共役複素数をとると、

$$\frac{1}{2} \text{Re}(A^* \cdot B) = \frac{1}{2} \text{Re}(a e^{-i(\phi + \delta_a)} \cdot b e^{i(\phi + \delta_b)}) = \frac{ab}{2} \cos(\delta_b - \delta_a)$$

となり、実数表示と一致する。

Maxwell 方程式

電磁現象に現れる電場、磁場などは全て下記の Maxwell 方程式を満足する。誘電率と透磁率が媒体の特性を表す量である。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \varepsilon : \text{誘電率}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mu : \text{透磁率}$$

D : 電気変位 (電束密度)、 **E** : 電場 (の強さ)

B : 磁束密度、 **H** : 磁場 (の強さ)

サイト内に掲載されているデータ・文章・画像等の無断使用、無断転記を禁じます。

株式会社ルケオ
〒173-0024 東京都板橋区大山金井町30-9
TEL : 03-3956-4111・FAX : 03-3956-2335
info@luceo.co.jp <http://www.luceo.co.jp/>
Copyright (C) Luceo CO.,LTD. All Rights Reserved.